ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Versuche über die Stärke und Elasticität des Eisens und Stahles, mit Rücksicht auf die Verwendung dieser Materialien zu Ketten und Balken;

von

Ign. Edlem von *Mitis.*

Vor einigen Monaten habe ich in dieser Zeitschrift über die Versuche, die ich zur Untersuchung der absoluten Festigkeit verschiedener Gattungen Stahles, mit Barren von kleinerem Querschnitte gemacht hatte, das lesende Publikum benachrichtiget, und da der Gegenstand an sich schon von großer Wichtigkeit ist, so glaube ich, dürfte die Mittheilung der Fortsetzung und Erweiterung dieser Versuche den Lesern dieser Zeitschrift nicht unangenehm seyn, und wenigstens den Nutzen herbeiführen, daß Männer von tieferen Einsichten und geprüfter Erfahrung, als ich bin, aufgeregt werden können, meine Mittheilungen zu würdigen, das allenfalls Unrichtige derselben aufzudecken, und somit die in jeder Beziehung höchst wichtige wahre Beschaffenheit der Sache mit unbezweifelter Richtigkeit an Tag zu fördern.

Ich habe meinem früheren Aufsatze eine Zeichnung der kleinen Hebelmaschine beigefügt, mittelst welcher ich meine Versuche mit Stangen von ein bis zwei Linien

Durchschnitt vorgenommen hatte, um dadurch den beurtheilenden Leser in den Stand zu setzen, sich einen richtigen Begriff von dem Versuchsverfahren zu machen, und daraus auf die mehr oder minder grofse Genauigkeit der Resultate zu schliefsen. Angenommen, dafs dem Verfahren und dem Baue der Hebelmaschine nichts auszusetzen sey, so bleibet doch noch immer der sehr kleine Querschnitt, welchen die untersuchten Stangen haben mufsten, damit sie der Kraft der Maschine angemessen waren, ein Gegenstand des billigen Zweifels über das Verhalten von Stangen mit einem beträchtlich gröfseren Querschnitte, welche in der practischen Verwendung weit öfter, als solche unbedeutende Mafse vorkommen.

Aus diesem Grunde nun, da ich hierzu eine vollkommen ähnlich gebaute grofse Hebelmaschine (ein Eigenthum der Wiener Kettenbrückenbau - Gesellschaft) benützen konnte, habe ich auch mit beträchtlich starken Eisen- und Stahlstangen einige Versuche über die absolute Festigkeit wiederholt, und glaube es sehr zweckmäfsig, auch diese Resultate bekannt zu machen.

Ich erhielt von der k. k. Hauptgewerkschaft in Eisenerz in Steiermark verschiedene, mit grofser Sorgfalt und Genauigkeit ausgeschmiedete Eisen- und Stahlstangen, die ich in Untersuchung nahm, und will das Resultat als eine Fortsetzung der Tabelle, die in dem mehrerwähnten früheren Aufsatze enthalten ist, geben.

Zahl des Versuches.	Benennung der Stangengattung.	Höhe des Prisma des Durchschnittes.	Breite.	Durchschnittsfläche.	Specifisches Gewicht.	Aufgelegtes Gewicht, welches den Bruch bewirkte.	Für einen □″ Querschnittsfläche berechnet.
1.	Eine Stange von zwei Mal gegärbtem Eisen	1″	0″,5	0,5□″	7,58	25140 Pf.	50280 Pf.
2.	Damascirter und ein Mal raffinirter Stahl	1″	0″,5	0,5□″	7,8	41500 »	83000 »
3.	Damascirter und zwei Mal raffinirter Stahl	1″	0″,5	0,5□″	7,8	52720 »	105440 »
4.	Tannenbaum- oder Scharschachstahl .	1″	0″,5	0,5□″	7,75	59880 »	119760 »

Zur Erläuterung dieser Versuchsergebnisse muſs ich einiges bei jedem derselben hier anfügen. Das probirte Eisen zeigt hier eine gröſsere Widerstandskraft, als ich in meinem vorigen Aufsatze aus früheren, mit eben der Maschine gemachten Versuchen angegeben habe, wo ich sagte, daſs ich die absolute Festigkeit nicht gröſser als 400 Centner auf den Quadratzoll Querschnitt gefunden habe; allein dieser Irrthum rührte von einer erst später entdeckten Unvollkom-

menheit der Maschine her, die darin bestand, dafs ich genöthiget war, bei jeder theilweisen Vermehrung der aufgelegten Belastung die Stange vorher ganz zu entlasten, und sofort das alte schon sehr beträchtliche Gewicht mit der neuen Vermehrung, die hinzugegeben ward, bis der Bruch folgte, wieder auf ein Mal aufzulegen. Dieses Verfahren mufste nothwendig die Kraft des Zusammenhanges früher erschöpfen, als wenn die schon einmal belastete und gedehnte Stange fortwährend mit neuen Lasten beleget wurde. Ein Draht oder eine dünne Eisenstange, wenn ich sie auch noch so mäfsig, aber doch schon über ihr natürliches Elasticitätsvermögen hin und her beuge, wird brechen, wenn ich auch bei weitem nicht die Kraft in vollem Mafse darauf wirken lasse, die ihre Zerstörung oder ihr Abreissen herbei zu führen im Stande ist, und mit Unrecht würde man diesen geringen Kraftaufwand zum Mafse ihres Widerstandvermögens bestimmen. Den gleichen Fall führte das so oft nöthige Belasten und Entlasten der Stangen, bei dem ich sie sonst untersuchte, herbei. Diesem Fehler habe ich mich bemüht abzuhelfen, aber es würde zu weit führen, wenn ich umständlich die Art, wie ich dabei zu Werke gegangen, beschreiben wollte, und es mag genügen, zu wissen, dafs nun die Hinzufügung der neuen Gewichte mit weniger Unterbrechung des schon wirkenden Zuges geschehen kann, und geschieht. Für gutes steirisches Eisen, und das war die untersuchte Stange in jeder Beziehung, was schon der Ort der Erzeugung verbürgt, ist auch die Cohäsionskraft von beiläufig 500 Centner durchaus nicht zu viel, was aus dem weiteren Verfolge dieser Mittheilung zu entnehmen ist.

Die zweite Stange, nämlich die damascirte und ein Mal raffinirte Stahlstange, zeigte eine Cohäsionskraft

von 830 Centner. Für Eisen zu viel, und für Stahl zu wenig. Ich muſs gestehen, daſs ich die Composition eines unter diesem Namen bei der k. k. Hauptgewerkschaft vorkommenden Materials nicht kenne, doch zeigte der Bruch, besonders die ziemlich merkbare conische Zusammenziehung der Bruchränder, daſs dieser sogenannte Stahl noch gröſsten Theils die Natur des Eisens hatte, und ich vermuthe, daſs selber aus Eisen und Stahl gemengt und zusammengegärbet ward, was oft zu geschehen pflegt, wenn man auf solchen Stahlarbeiten durch saure Beizen an der äuſseren Fläche die Damast- oder Fladerform und Zeichnung erscheinen machen will. Eben so wenig kenne ich, was für eine Manipulation bei dem Raffiniren des Stahles Statt findet, um daraus auf die gröſsere Festigkeit der dritten Stange zu schlieſsen, die doch schon 1050 Centner Last bis zum Bruche trug; aber so viel ist erweislich und gewiſs, daſs wenigstens Eisen, je öfter es im Feuer überarbeitet und gefrischet wird, um so besser und consistenter ist, ja daſs das beste Eisen in der Regel jenes ist, was aus alten, und am besten sehr kleinen Stücken eingerennet und frisch ausgestrecket wird.

Endlich die vierte untersuchte Stange war eigentlicher, natürlicher gemeiner Stahl, welchen die trefflichen Spateisensteine des Erzberges bei Eisenerz bei gehörigem Schmelzprozeſs und Kohlensatz de. Hochofens zum Theil schon in den Flossen geben. Dieses treffliche Naturproduct der österreichischen Monarchie hat auch in diesem gröſseren Versuche, so wie in dem früheren kleineren seine Kraft bewährt, indem es fast 1200 Centner bis zum Bruche trug. Viele noch sonst häufig gemachte Versuche, die ich aber nicht stets so genau zu protocolliren für nöthig fand, haben für den

gemeinen Stahl stets eben so günstige Resultate gegeben.

Ohne allen Zweifel ist die Kenntniſs der absoluten Festigkeit dieser Eisen- und Stahlstangen von groſser Wichtigkeit und Nutzen; allein da die Verwendung dieser Kräfte in vollem Maſse, wie von selbst einleuchtet, allezeit mit der Zerstörung, das heiſst mit dem Bruche verbunden wäre, so gehöret, wie mir scheint, jeder Versuch darüber nur der Theorie an, und zwar um so mehr, da aus den Ergebnissen durchaus nicht auf einen proportionirten Theil der Widerstandsfähigkeit geschlossen werden kann, von welchem man mit der Beruhigung in der Ausübung Gebrauch zu machen im Stande ist, daſs dessen fortgesetzte Anwendung die natürliche Kraft der Stange nicht sogleich oder in der Länge der Zeit angreiſe und erschöpfe, und daſs also einerseits die Benützung zum Nachtheil der Standhaſtigkeit des Eisens zu groſs, daher Gefahr damit früher oder später verbunden wäre, andererseits aber, daſs man auch nicht durch die Bestimmung eines zu geringen aliquoten Theils dieses Widerstandsvermögens, besonders bei Verwendungen, wie die Kettenbrücken zum Beispiel, sich unnöthig zu sehr in seinem Anspruche beschränkt, und dadurch Maſse und Kosten verschwendet, die dem Unternehmer in allen Beziehungen zur Last fallen, ohne irgend einen gröſseren Nutzen zu schaffen, als die groſse Beruhigung, daſs eine so derbe Construction für Patagonier eben so als für Menschen unseres Schlages Sicherheit geben wird.

Auf das wahre Maſs der benützbaren Kräfte führen uns ganz andere Betrachtungen, und die Kenntniſs der eben so wie die absolute Festigkeit unwandelbaren Eigenschaften dieser Metallsubstanzen, nämlich der Gränzen ihrer natürlichen Elasticität.

Indem ich dieses Wort niederschreibe, dränget sich mir unwillkürlich die Erinnerung auf, wie oft ich, bei der Mittheilung dieser Idee, selbst von wissenschaftlich gebildeten Männern mifsverstanden worden bin, wenn die Rede von Elasticität war, indem man darunter jenes Vermögen einiger Körper verstand, eine ihnen künstlich gegebene Form, zum Beispiel die schneckenförmige der Uhrfeder, die spiralförmige der Drahtfeder, gegen den Zug oder Druck zu behaupten; diese Elasticität, wenden sie dann ein, ist in ihren Kraftäufserungen durchaus nicht so gleichförmig, und noch weniger beständig, als dafs man irgend einen Angriff darauf mit stets gleicher Sicherheitsgewährung für die Länge der Zeit berechnen könnte, und somit ist sie als Mafs der Verwendung, wenigstens mit der Zeit, verwerflich und höchst gefährlich.

Weit entfernt, das Gegentheil beweisen zu wollen, da ich mich dadurch aussetzen würde, am Ende durch einen abgetragenen Hosenträger widerlegt zu werden, mufs ich nur erinnern, dafs von dieser Elasticität, die ich zum Unterschiede die künstliche nennen will, durchaus keine Rede sey, und dafs man unter Elasticität, in dem Sinne, wie selbe hier zu nehmen ist, jene physische, den Charakter, ja sogar die natürliche Form der Körper bestimmende Eigenschaft oder Kraft zu verstehen hat, sich in ihrer natürlichen Umgränzung, d. i. Ausdehnung oder cubischen Gröfse zu erhalten, und vielmehr, wenn durch irgend eine andere entgegenwirkende Kraft die eigenthümliche Ausdehnung vermehrt oder vermindert werden will, nach Beseitigung dieser Gegenwirkung in ihre vorige Lage und natürliche Begränzung zurückzutreten. Dafs diese Eigenschaft der Elasticität jedem Körper, der irgend einen Ton von sich gibt,

oder auch den hervorgebrachten fortzuleiten im Stande ist, eigen seyn müsse, wird dem, der mit den Gesetzen der Physik bekannt ist, von selbst klar seyn, so wie, daſs man aus der Höhe oder Tiefe des Tones zum Theil auf den Grad der Elasticität schlieſsen könne.

Dieser zum Gegenstand der Abhandlung freilich nicht wesentlich gehörende Satz mag im Vorübergehen nur darum gesagt seyn, daſs man daraus entnehmen möge, daſs ein Körper, der keinen Ton, oder die Fortpflanzungsfähigkeit desselben hat, wohl schwerlich in der Natur denkbar sey, also auch kein Körper bestehe, der nicht die Elasticität in irgend einem Grade besitzet. Die scharfsinnigen Erklärungen, wodurch in der Zusammensetzung der ursprünglichen Theile eines Körpers die Elasticität hervorgebracht wird, führen zu weit in die Theorie, und können kein Gegenstand dieser kleinen Abhandlung seyn.

Modificirt, das heiſst erhöhet oder vermindert, kann die Elasticität bei allen Körpern durch die Natur, bei einigen auch durch den Gebrauch werden; und darauf beruhet die Frage für den gegebenen Fall, die darin bestehet: Welche Kraft darf man der natürlichen Elasticität entgegen wirken lassen, ohne daſs sie weder augenblicklich noch in der Zukunft eine Anderung erleidet?

Die Versuche und Ergebnisse über die absolute Festigkeit haben uns an die äuſsere Gränze der Gewalt geführet, wo wir aus einem ganzen Körper zwei gemacht, und noch obendrein seine Natur so verändert haben, daſs wir mit leichterer Mühe und geringerem Kraft- oder Gewichtaufwand aus diesen Theilen noch mehrere machen können; denn nicht nur der Bruch, sondern auch die theilweise Zerstörung des Zusammenhanges und der

Elasticität, die Veränderung des Gefüges, der Einheit der Theile der beiden Stücke der abgerissenen Stahl- und Eisenstangen, war eine Folge der auf selbe wirkenden Lasten, und es ist sehr wesentlich, zu bemerken, daſs diese Veränderung des Gefüges weit dem eigentlichen Bruch vorausgehet, und man würde sich sehr irren, wenn man z. B. von vier Eisenstangen, die bestimmt sind gemeinschaftlich eine bestimmte Last zu tragen, nnd wovon jede mit einem vierten Theil in Anspruch genommen wird, fordern oder erwarten würde, daſs, wenn nur eine darunter ist, die sich bei irgend einer, vorher einzeln auf jede Statt gehabten Wirkung einer Last, um einen auch noch so kleinen Theil ihrer Länge oder sonstigen Ausdehnung geändert haben würde, und dadurch das gleiche Maſs mit den übrigen erhalten hätte, nun mit dem gleichen Maſse in der Vereinigung aller vier widerstehe. Eine Meinung, die Viele zu haben scheinen, und die bei gewissen Umständen sehr bedenkliche Folgen haben kann, und bei Körpern, die einen minderen Grad der Elasticität haben, z. B. Eisen gegen Stahl, tritt diese beliebte Gleichstellung der Längen natürlich leichter und früher, dagegen mit gröſserer Gefahr ein, vor welcher zu warnen auch um so grösser die Nothwendigkeit zu seyn scheinet.

Versuche über die relative Festigkeit sind es, die uns zugleich über die weit wichtigere Frage belehren. wie groſs die äuſsere einwirkende Kraft seyn dürfe, die die natürliche Elasticität auf Stahl und Eisen nicht störet, das heiſst, sie in seiner Kraft, bei stäter oder oft wiederholter Anwendung der Gegenwirkung, in ihrem vollen Maſse bleiben läſst, so lange die Natur nicht durch andere, zum Beispiel chemische Einwirkungen, als Rost u. s. f., dieselben in ihrer physischen Wesenheit,

folglich auch in ihrem Grade der Elasticität verändert

Ich bin weit entfernt, diese Ansicht für neu auszugeben, sondern weiſs gar wohl, daſs sie seit *Galiläi's* Zeiten von den gröſsten Mathematikern und Ingenieuren behandelt, und der strengsten Rechnung unterworfen worden ist. Ich habe mich bloſs darauf beschränkt, das Feld der Versuche, besonders in Betreff des Stahles, zu erweitern.

Damit man aber beurtheilen könne, ob die hier mitzutheilenden Versuche Werth haben, ist vor allem nöthig, eine Beschreibung und Abbildung der Maschine zu geben.

Beschreibung des bei meinen Versuchen gebrauchten Extensiometers.

Fig. 6.

a a zwei vertical stehende Säulen, welche
b b b b durch Strebestützen senkrecht auf
c c den Fuſsbalken befestiget sind, und zwischen dem
d e e Bohngerüste sich wechselseitig angenähert und von einander entfernt werden können. Das obere Ende dieser Säulen ist prismatisch zugespitzt, und durch
f Stahlstangen, die durch Klammern festgehalten werden, gegen die Eindrücke der zu untersuchenden Barren gedecket. Die Länge dieser Barren, oder der Abstand der Säulen, wurde allezeit von der einwärts gerichteten Kante des Stahlstabes gemessen.

An der auswärts gerichteten Seite der vierseitigen Auflagssäulen ist ein
g g Pfosten aufrecht befestiget, der die Breite des Laufgerüstes hat, und auf dem Bohnbalken selbst aufstehet, wodurch die Tragsäulen selbst noch verstärkt

werden. In der Höhe der stählernen Auflagspuncte sind diese Pfosten durchlöchert, und mit starken Eisenschienen die viereckigen Öffnungen rundum eingerahmet, um die zum Versuche bestimmten längeren Barren durchzustecken, oder auch, wenn man selbe an einem frei schwebenden Ende belasten will, das andere Ende durch Keile aus Eisen in diesen Öffnungen zu befestigen. An den Seiten dieser Pfosten sind

i i eiserne Klammern, durch welche die

h Tragstangen für den Extensiometer durchgeschoben werden.

Auf diesen Stangen wird der mit eisernen Füſsen versehene Extensiometer durch die

k Hülsen eingeschoben, und an der Stelle mit Stellschrauben befestiget, wo man die zu untersuchenden Barren in der Entfernung von den Auflagepuncten mit den Gewichten belasten will. Auſser diesen ist von dem Instrumente in der ersten Figur noch ein

l kreisrundes Blatt, in hundert Umkreistheile eingetheilet, nebst

m dem an einem vierkantigen Zapfen steckenden Zeiger, zu sehen.

Fig. 7.

Ist dieses Instrument nach der Seite anzusehen, und hier der wesentlichste Bestandtheil, nämlich

n der genau abgedrehte Cylinder aus Eisen zwischen beiden Füſsen (vorhin mit *k* bezeichnet), und durch einen

o Bügel oben zusammen gehalten. An diesem Bügel ist eine Stahlfeder

p angenietet, welche auf den leicht sich an der Axe bewegenden Cylinder aufdrücket, damit er fest genug

an der Richtungsstelle stehen bleibet. Über diesen Cylinder ist ein Faden von flacher Seide gewunden, an dem ein
q Senkel hängt. Dieser Senkel besteht aus einer Bleikugel, durch welche senkrecht ein Drahtstift von mehr als zwei Zoll Länge gehet. Wenn dieser Senkel durch Umdrehung des Zeigers so weit herabgelassen wird, bis die Spitze des Drahtstiftes entweder die zu untersuchenden Barren oder das Prisma der Wagschale berührt, so zeiget selber, wenn dann Gewichte aufgeleget werden, der Barren sich senkt, durch ein weiteres Vorrücken des Zeigers genau, um den wievielten Theil des Umkreises am Cylinder die Stange ausgewichen ist; dieses Umkreismaſs erscheinet dann natürlich vergröſsert an der Spitze des Zeigers auf der vorderen in hundert Theile getheilten Scheibe. Der Umkreis des Cylinders hat hier in diesen Instrumenten 6′′, 4′′′ Wiener Maſs, und es würde sehr zweckmäſsig seyn, da er ohnehin nichts zu tragen hat, als den Senkel, ihm einen bei weitem kleineren Durchmesser zu geben, weil die Beobachtungen bei der Gröſse der Scheibe dann um so deutlicher seyn würden.

F i g. 8.

Zeiget die ebenfalls in der ersten Figur ersichtliche Wagschale oder Wagbrücke; sie wird mit
r dem dreiseitigen stählernen Prisma auf jenen Punct des zu untersuchenden Barrens gehangen, dessen Abstand man zum Versuche wählet; in der Zeichnung stehet diese Brücke gerade im Mittel der Entfernung der Auflagepuncte, und weil der Senkel am Faden in der Tangente des Cylinders sich herabsen-

ket, muſs der Extensiometer natürlich etwas verschoben über der Mitte stehen.

Die Einrichtung der Brücke für die aufzulastenden Gewichte ist schon durch die Ansicht der Zeichnung deutlich, und nur zu bemerken, daſs, im Falle man nicht genug Raum auf der Brücke selbst für die Gewichte findet, an der Seite noch
s sechs vorstehende Haken sich befinden, woran Gewichte mit Ringen eingehangen werden können. Nur ist zu bemerken, daſs jederzeit die Gewichte möglichst gleich vertheilet werden, damit die Brücke vollkommen horizontal schwebet, und die Belastung die Stangen oder Barren nicht schief drücket, sondern parallel und senkrecht durch die Axe der Barrenform.

* * *

Von mehr als 200 Versuchen, unter verschiedenen Abänderungen gemacht, alle anzuführen, wäre wohl überflüssig, und ich muſs daher das Vertrauen der Leser in so ferne in Anspruch nehmen, daſs ich die wenigen hier mitzutheilenden aus guten Gründen gewählet, dabei aber gewiſs die gewissenhafteste Unparteilichkeit beobachtet habe, weit entfernt von der Absicht, zu beweisen, was nur zu leicht von Jedem, der Lust und Geschick zu eigenen Versuchen hat, widerlegt werden kann, wenn es nicht wahr ist. Übrigens habe ich mich überall, wo vom Maſs und Gewicht die Rede ist, des österreichischen bedienet, und fremde Angaben nach *Vega's* Reductions-Tabellen auf österreichisches Maſs gebracht. Alle Versuche, die den Stahl betreffen, sind mit geschmiedeten und durchaus ungehärteten Stangen vorgenommen worden.

Tabelle über die Stärke der relativen Festig-
Eisen-

Nummer des Versuches.	Bestimmung der untersuchten Stange.	Vierseitig prismatisch.			Entfernung der Auflagen der Stangen von einander.
		Höhe	Breite	Durchschnittsfläche	
		in Zollen.			
1	Ein Mal gegärbtes Eisen von der k. k. Hauptgewerkschaft.	1″	0″,5	0□″,5	46″
2	Eine von dem Hammermeister *Poschal* bei Krems aus altem Brucheisen verfertigte Stange.	0″,78	1″,525	1□″,1895	46″
3	Eine Eisenstange von mir unbekanntem Ursprunge.	1″,75	0″,6	1□″,05	60″

keit nachfolgender Gattungen von Stahl- und stangen.

Belastung in der Mitte.	Senkung in Zollen.	Anmerkungen.
Wagschale, nebst dem halben eigenen Gewicht d. Stange 17 Pf.	0″,0374	Bei jedesmaliger Belastung wurde das Gewicht wieder abgenommen, und untersucht, ob eine bleibende Beugung zu bemerken war. Bis zur angewachsenen Vermehrung des Gewichtes auf 225 Pf. fand durchaus keine bleibende Krümmung Statt, daher ich das Gewicht und die entsprechende Krümmung von 0″,5 als das Maximum seiner Widerstandskraft gegen in der Mitte aufgelegtes Gewicht ansah. Dem ungeachtet legte ich noch ferner Gewichte zu, und bemerkte die anfangs kaum merkliche, am Ende aber doch 0″,05 betragende bleibende Beugung, Im Allgemeinen will ich bemerken, dafs ich bei allen Versuchen, die hier folgen, auf gleiche Art die Belastung nur stets theilweise vermehrt habe, und dann bei eintretender bleibender Beugung noch so lange fortgefahren bin, bis ich selbe in der That messen konnte; allein diese umständliche Weise werde ich in der Tabelle dadurch abkürzen, dafs ich nur die Summe der ohne Nachtheil wirkenden Gewichte nebst der entsprechenden Beugung, und am Ende aufgelastete Totalgewicht wieder mit seiner entsprechenden Beugung, so wie jenen Theil derselben, den ich als bleibend bemerkte, anzeigen will.
8 »	0″,0176	
25 »	0″,055	
25 »	0″,055	
25 »	0″,055	
25 »	0″,055	
25 »	0″,055	
25 »	0″,055	
25 »	0″,055	
25 »	0″,055	
Summe 225 »	0′,495	
25 »	0″,055	
25 »	0″,055	
25 »	0″,06	
25 »	0″,062	
Haupts. 325 Pf.	0″,728	
Belastung 500 Pf.	0″,676	Mit 500 Pf. blieb keine bleibende Beugung, dagegen mit 530 Pf. die bleibende Beugung 0″,001 betrug.
Überdiefs 30 »	0″,004	
Belastung 470 Pf.	0″,4	Bei der Belastung von 470 Pf. blieb durchaus keine bleibende Krümmung, dagegen nach Abnahme der 500 Pf. schon eine bleibende Beugung von 0″,001 zu sehen war.
Überdiefs 30 »	0″,03	

Nummer des Versuches.	Bestimmung der untersuchten Stange.	Vierseitig prismatisch.			Entfernung der Auflagen der Stangen von einander.
		Höhe	Breite	Durchschnittsfläche	
		in Zollen.			
4	Eine Eisenstange, die zu Märzzuschlag im Hammer des Hrn. *Vinzenz Huber* verfertiget wurde, aus Vordernberger Flossen.	0″,583	0″,583	0□″,35	57″,75
5	Dieselbe Stange, an einem Ende befestiget, an dem anderen frei vorragend.	0″,583	0″,583	0□″,35	30″
6	Eine Eisenstange, ebenfalls aus demselben Hammer.	0″,5	0″,5	0□″,25	57″,75
7	Detto.	0″,5	0″,5	0□″,25	57″,75
8	Detto.	0″,458	0″,458	0□″,21	57″,75
9	Detto.	0″,416	0″,9166	0□″,38	57″,76
10	Dieselbe Stange, die im Versuche 9 gebraucht war.	0″,9166	0″,416	0□″,38	57″,75
11	Eine Stange von Stahl, v. der k.k. Hauptgewerkschaft, und zwar v. Tannenbaum- od. Scharschachstahl, wie in obiger Tabelle über absolute Festigkeit im 4. Vers.	1″	0″,5	0□″,5	46″

Belastung in der Mitte.	Senkung in Zollen.	Anmerkungen.
Belast. 76,35 Pf. Uberdieſs 20 »	1″,09 1″,29	Bei der ersten Belastung von 76,35 Pf. war keine, bei 96,35 Pf. aber eine bleibende Krümmung von 0″,05 zu sehen.
Belast. 45,43 Pf. am vorragenden Ende.	1″,448	Bleibende Krümmung 0″,09.
Belastung 29 Pf. Uberdieſs 6 »	1″,16 1″,24	Bei dem ersten Gewichte von 29 Pf. war keine Krümmung der Stange eingetreten, aber als die gesammten 35 Pf. aufgelegt waren, so hatte sich schon eine bleibende Krümmung von 0″,02 ergeben.
Belastung 34 Pf. Uberdieſs 6 »	1″,01 1″,1898	Bleibende Krümmung nach Abnahme der aufgelegten 40 Pf. 0″,02.
Belastung 25 Pf. Überdieſs 5 »	0″,87 0″,174	Bleibende Krümmung nach Abnahme der 30 Pf. 0″,023.
Belastung 50 Pf. Uberdieſs 6 »	1″,051 0″,1	Bleibende Senkung bei 56 Pf. 0″,03.
Balastung 100 Pf. Uberdieſs 10 » detto 10 »	0″,465 0″,08 0″,05	Bei 100 Pf. war keine Krümmung, bei 110 Pf. eine kaum merkliche, bei 120 Pf., wo die Senkung 0″,595 im Ganzen betrug, blieb eine Krümmung von 0″,04 zurück. Ich lieſs bei mehreren, besonders aber bei dieser Stange die gröſsten Lasten durch 24 Stunden aufgeleget, habe aber in keinem Falle nach dieser Zeit bei der Abnahme eine weitere Vermehrung der Krümmung beobachten können.
Belastung 375 Pf. Überdieſs 50 »	0″,684 0″,096	Bei der ersten Belastung war keine Krümmung geblieben, nach Abnahme der Last von 425 Pf. aber blieb von der 0″,78 Senkung eine Krümmung von 0″,03 zurück.

Nummer des Versuches.	Bestimmung der untersuchten Stange.	Vierseitig prismatisch. Höhe	Breite	Durchschnittsfläche	Entfernung der Auflagen der Stangen von einander.
		in Zollen.			
12	Dieselbe Stange.	0″,5	1″	0□″,5	46″
13	Dieselbe Stahlstange.	1″	0″,5	0□″,5	An einem frei vorstehenden Ende belastet 28″,875
14	War ebenfalls eine aus hauptgewerkschaftl. Stahl derselben Gattung verfertigte Stange	1″	0″,5	0□″,5	Auflagen auf beiden Enden 46″
15	Dieselbe Stange.	0″,5	1″	0□″,5	Eben so 46″
16	Hauptgewerkschaftlicher damascirter, und ein Mal raffinirter Stahl.	1″	0″,5	0□″,5	Eben so 46″
17	Dieselbe Stange.	0″,5	1″	0□″,5	Eben so 46″
18	Hauptgewerkschaftlicher damascirter, und zwei Mal raffinirter Stahl.	1″	0″,5	0□″,5	Eben so 46″
19	Dieselbe Stange.	0″,5	1″	0□″,5	Eben so 46″

Belastung in der Mitte.	Senkung in Zollen.	Anmerkungen.
Belastung 200 Pf. Überdiefs 20 »	1″,199 0″,125	Bei der ersten Belastung von 200 Pf. eine kaum merkliche Senkung, dahingegen bei Abnahme der 220 Pf. schon eine Krümmung von 0″,03 bleibend gefunden.
Belastung 145 Pf. Überdiefs 10 »	0″,89 0″,08	Bei der Last von 155 Pf., wo die Beugung 0″,97 betrug, wurde schon eine bleibende Krümmung von 0″,002 gefunden.
Belastung 370 Pf. Überdiefs 50 »	0″,66 0″,09	Bei der Belastung von 370 Pf. und Beugung 0″,66 war gar keine Krümmung geblieben; aber bei der Last von 420 Pf. betrug die Beugung 0″,75, und die bleibende Krümmung 0″,029.
Belastung 200 Pf. Überdiefs 20 »	1″,165 0″,126	Dafs hier sowohl die erste ganz unschädliche Beugung bei einer Last von 200 Pf. verhältnifsmäfsig gegen den vorhergehenden Versuch um etwas zu grofs eingetreten ist, und eben so die zweite bei der Last von 220 Pf., wo sie in Summa 1″,291, kann nur daher kommen, dafs die Stange nach ihrer flachen Seite vielleicht an einigen Stellen ungleich dick war, was mit dem Mafsstabe zu finden wohl nicht möglich ist. Die bleibende Krümmung nach Abnahme der 220 Pf. 0″,05.
Belastung 280 Pf. Überdiefs 25 »	0″,5 0″,046	Bei Abnahme der vollen Last von 305 Pf., und der dadurch erfolgten Beugung von 0″,546, war eine bleibende Krümmung von 0″,02 vorhanden.
Belastung 145 Pf. Überdiefs 15 »	0″,86 0″,09	Bei Abnahme der vollen Last von 160 Pf., und der Beugung von 0″,95, blieb eine Krümmung von 0″,03.
Belastung 350 Pf. Überdiefs 30 »	0″,55 0″,048	Bei Abnahme der vollen Last von 380 Pf. blieb von der Beugung 0″,598 eine Krümmung von 0″,028 zurück.
Belastung 180 Pf. Überdiefs 20 »	1″,2 0″,14	Bei Abnahme der vollen Last von 200 Pf. blieb von der Beugung 1″,34 eine Krümmung von 0″,03 zurück.

Nummer des Versuches.	Bestimmung der untersuchten Stange.	Vierseitig prismatisch.			Entfernung der Auflagen der Stangen von einander.
		Höhe	Breite	Durchschnittsfläche	
		in Zollen.			
20	Eine vom Hrn. *Huber* in Märzzuschlag aus gegärbtem Scharschachstahl verfertigte Stange, zu der Kette der Carlsbrücke bestimmt.	0″,5833	2″	1□″,1666	Auf 2 Auflagen in der Entfernung von 48″ an beiden Enden unterstützet.
21	Ein zweites solches Kettenglied	0″,5833	2″	1□″,1666	Eben so 48″
22	Ein drittes solches Kettenglied.	0″,5833	2″	1□″,1666	Eben so 48″
23	Ein viertes solches Glied.	0″,5833	2″	1□″,1666	Eben so 48″
24	Ein fünftes solches Glied.	0″,5833	2″	1□″,1666	Eben so 48″

Nach diesen in der vorliegenden Tabelle enthaltenen Versuchsergebnissen will ich nun, in Folge der von Hrn. *Thomas Tredgold*, Civil-Ingenieur in England, gegebenen Verfahrungsregeln, die wichtige Frage lösen: Wie weit man solche Gattungen Eisen oder Stahl, wie Österreich im Überflusse hat, bei Verwendung in Anspruch nehmen könne, ohne die geringste Besorgniſs für ihre, und zwar permanente, hinlängliche Widerstandsfähigkeit?

Ich besitze zwar die erste in England von Hrn. *Tredgold* herausgegebene Originalauflage seines dieſsfälligen Werkes, unter dem Titel: *A practial Essay on the*

Belastung in der Mitte.	Senkung in Zollen.	Anmerkungen.
Belastung 470 Pf. Überdiefs 30 »	1″,09 0″,075	Bei Abnahme der ganzen Belastung von 500 Pf. blieb von der Beugung 1″,165 eine Krümmung von 0″,02 zurück.
Belastung 470 Pf.	1″,13	Bei Abnahme des Gewichtes blieb keine Krümmung zurück.
Belastung 470 Pf.	1′,12	Bei Abnahme des Gewichtes fand eine sehr kleine Krümmung, die höchstens 0″,01 betragen konnte, Statt, daher ich diesen Versuch in der Berechnung nur mit 465 Pf. Gewicht aufnehme.
Belastung 470 Pf.	1″,05	Bei Abnahme des Gewichtes keine Spur von Krümmung.
Belastung 470 Pf.	1″,1	Bei Abnahme des Gewichtes war abermals keine Krümmung sichtbar.

Strength of cast Iron, habe aber noch mehr eine in Leipzig bei *Baumgärtner* herausgekommene Übersetzung der zweiten Auflage des Originals im Jahre 1826 darum benützt, weil in selber ungemein viele Vermehrungen und höchst interessante Verbesserungen vorkommen.

Zu bedauern ist nur, dafs die gewifs verdienstliche Übersetzung eines so belehrenden Werkes mit so weniger Sorgfalt redigirt ist, dafs selbe oft von sinnstörenden Fehlern im Texte und in den Formeln wimmelt, und dafs nur derjenige dieselben finden wird, der das Werk nicht liest, sondern mit der Feder in der Hand studirt.

Für Jene, die diesen Aufsatz nicht nur lesen, son-

dern gründlicher über die Sache belehret oder überzeugt seyn wollen, werde ich allezeit, so oft ich eine Rechnungsformel hier gebrauche, Seite und §. in Klammern gestellt beisetzen, wo sich in der erwähnten Übersetzung das für einen Zeitschriftsartikel zu Weitläufige zur nöthigen Begründung und Erläuterung findet.

Zuerst will ich für alle in der Tabelle enthaltenen Eisengattungen, nach den Ergebnissen der zehn ersten Versuche, die Gröſse der Ausdehnung berechnet darstellen, welche jede Art Eisen, ohne Nachtheil seines Gefüges, also ohne Kraftverlust aushält. Dazu dienet (Seite 170, §. 212)

$$\frac{3 \cdot h \cdot DA}{2\, l^2} = \varepsilon.$$

Um ein für alle Mal den Werth der Buchstaben, die in dieser und allen folgenden gebrauchten algebraischen Formeln vorkommen, zu bestimmen, will ich ihre Bedeutung hier ansetzen:

$\varepsilon =$ der gröſsten unschädlichen, in den Gränzen der natürlichen Elasticität bleibenden, bei der Entlastung verschwindenden Ausdehnung der untersuchten Stange, in Theilen der Stangenlänge.

DA, oder zuweilen kürzer bloſs $d =$, der bei Auflegung von Lasten bemerkten Krümmung der Stange in Decimal-Zollen ausgedrückt.

$L =$ die Länge der Stange in Zollen.

$L' =$ die Länge im Fuſsmaſs.

$l =$ die halbe Länge der Stange in Zollen.

$l' =$ die halbe Länge im Fuſsmaſs.

$h =$ das Maſs der verticalen Seitenflächen des Prisma der Stange, oder die Höhe.

$b =$ der Horizontalflächen desselben Prisma, oder die Breite beider in Zollen.

$w =$ die bei der Untersuchung aufgelegte Last in Pfunden.

$f =$ die höchste Last, welche auf einen Stab von 1□″ Durchschnitt als Basis, ohne Beeinträchtigung der Kraft desselben, wirken kann.

Im Versuche Nro. 1 ist also

$$l = 23'',$$
$$h = 1'',$$
$$DA = d = 0'',495.$$

Diese Werthe, in die Formel substituirt, geben $\frac{3 \cdot 1'' \cdot 0,495}{2,23''^2} = 0,0014 = \frac{1}{712} =$ der gröfsten Verlängerung ε, der solches Eisen mit Beibehaltung seiner Stärke ausgesetzt werden darf, und die wieder verschwindet, wenn die Last zu wirken aufhöret.

Bei dem Versuche Nro. 2 $\varepsilon = 0'',00149 = \frac{1}{668}$.

» » » » 3 $\varepsilon = 0'',00116 = \frac{1}{857}$.

» » » » 4 $\varepsilon = 0'',00114 = \frac{1}{874}$.

Den fünften Versuch, da die Verlängerung bei dem Umstande, dafs die Stange im Versuche nur an einem Ende belastet, aber das andere befestiget war, durch eine umständlichere Formel berechnet werden mufs, will ich um so mehr übergehen, weil es ohnehin dieselbe Stange wie im vorigen Versuche war.

Bei dem Versuche Nro. 6 $\varepsilon = 0'',00104 = \frac{1}{958}$,

» » » » 7 $\varepsilon = 0'',000908 = \frac{1}{1100}$.

» » » » 8 $\varepsilon = 0'',00078 = \frac{1}{1277}$.

» » » » 9 $\varepsilon = 0'',000787 = \frac{1}{1269}$.

» » » » 10 $\varepsilon = 0'',000768 = \frac{1}{1301}$.

Das Eisen Nro. 2 erleidet die gröſste Verlängerung von allen übrigen, welche auch wieder der Kraft unbeschadet bei Abnahme des Gewichtes verschwindet, also muſs seine Elasticität die gröſste seyn; auch wenn solches Eisen, was aus altem Brucheisen eingerennet und ausgeschmiedet worden ist, durch eine Gewalt abgerissen wird, so sind am Bruche die Kanten des Prisma nicht so sehr zusammen gezogen und conisch, als bei Eisen im neunten und zehnten Versuche, die bei weitem weniger Elasticität haben, also weniger Bestreben und Vermögen, ihre ursprüngliche Form, durch äuſsere Gewalt angegriffen, wieder herzustellen.

Aus einer solchen Bemerkung kann z. B. ein Drahtzieher bei der Wahl des Eisens, das er in Draht verwandeln will, Gebrauch machen. Will er guten und starken Draht machen, so nehme er vom Eisen Nro. 2, aber er muſs es öfter durch die Zugeisenlöcher gehen lassen, und darf keine Nummer derselben überspringen, denn wie das Eisen das Ziehloch, welches es streckte, verläſst, so stellet es sich wieder zum Theil in seiner vorigen Dicke her, und gehet ohne einige Gewalt gewiſs nicht wieder durch dasselbe Loch des Zieheisens; will er aber nur recht schnell seinen Draht erzeugen, unbekümmert um dessen nachherige bessere Eigenschaften, so nehme er nur das minder elastische Eisen, das schnell die angemessene Dicke des Loches annehmen, sich aber zu Federn schwerlich so gut als Draht von der andern Gattung Eisen brauchen lassen wird.

Senket sich eine Kettenbrücke, deren Ketten aus Eisen der Art Nro. 2 gemacht sind, durch groſse Lasten mehr als eine andere von der anderen Art Eisen construirt, so ist das kein Beweis, daſs mehr Gefahr damit verbunden ist, denn die alte Gestalt oder Horizontalrichtung der Brücke wird sich leicht herstellen; aber

weniger elastisches Eisen dürfte leicht eine gröſsere Senkung behalten.

Aus dem ersten Versuche, der umständlich in der Tabelle aufgeführt ist, ergibt sich der wichtige Satz, daſs die Ausdehnung eines Stabes durch eine Kraft, die in der Richtung seiner Länge wirkt, bei einerlei Querschnitt im geraden Verhältnisse zum aufgelegten Gewichte steht, so lange dadurch die Gränzen der vollkommenen Elasticität des in Anspruch genommenen Körpers nicht überschritten werden. Diese Gränzen müssen wohl beachtet werden; denn sobald man die elastische Kraft überschreitet, so wird gröſsere Ductilität bemerkbar.

Man kann einen sehr wichtigen Vortheil aus der Anwendung dieses Grundsatzes ziehen, nämlich wenn man die Dehnungsfähigkeit eines Körpers einmal kennet, das heiſst, wenn man weiſs, um wie viel er sich unter einer gewissen Last, wäre selbe auch bei weitem nicht die gröſste, die er auszuhalten vermag, beugen wird, so darf man nur diese Last auf ihn einwirken lassen, und die Gröſse der Beugung, die natürlich mit einer Verlängerung verbunden ist, beobachten. Entspricht sie der voraus gemachten Bestimmung, so ist der Körper in seinem Wesen und Natur nicht verändert, also gesund und brauchbar; tritt aber einmal eine verhältniſsmäſsig gröſsere Beugung ein, so kann man die Construction sicher als gefahrvoll ansehen.

Bauet man gröſsere Werke, und besonders Werke, wie z. B. Kettenbrücken, wo Menschenleben gefährdet werden kann, so ist es sehr räthlich, sich über den vorlauten Spott der Empiriker weg zu setzen, und fleiſsig die Anzahl der Versuche zu mehren, ohne daſs es nöthig ist, jedes Stück etwa in Rücksicht der Elasticität zu versuchen, was wohl in Ansehung der absoluten Festig-

keit unerläſslich bleibet, da die dahin gehörigen Versuche gegen solche Fehler gerichtet sind, die bei jedem einzelnen Stück Statt haben können, und nicht immer leicht zu entdecken sind. Es gibt freilich noch ein bequemeres Mittel, was die Mühe der Versuche sparet, nämlich der gröſsere Masseaufwand, oder die Benützung vorgegangener Erfahrungen; dieses letzte ist auch das beste, besonders wenn der Vorgänger auf richtigen und geprüften Grundsätzen sein Constructions-System gebauet hat.

Durch dieselbe Formel, welche uns oben die Verlängerung nach den Versuchsergebnissen für das Eisen gegeben hat, ist auch für die Versuche mit Stahl die Verlängerung berechnet worden.

Bei dem Versuche Nro. 11 $\varepsilon = 0'',001939 = \frac{1}{515}$.

» » » » 12 $\varepsilon = 0'',001696 = \frac{1}{589}$.

» » » » 14 $\varepsilon = 0'',00187 = \frac{1}{534}$.

» » » » 15 $\varepsilon = 0'',00165 = \frac{1}{606}$.

» » » » 16 $\varepsilon = 0'',0014 = \frac{1}{705}$.

» » » » 17 $\varepsilon = 0'',001219 = \frac{1}{820}$.

» » » » 18 $\varepsilon = 0'',001559 = \frac{1}{641}$.

» » » » 19 $\varepsilon = 0'',0017 = \frac{1}{578}$.

» » » » 20 $\varepsilon = 0'',00165 = \frac{1}{603}$.

» » » » 21 $\varepsilon = 0'',001716 = \frac{1}{582}$.

» » » » 22 $\varepsilon = 0'',00168 = \frac{1}{545}$.

Bei dem Versuche Nro. 23 $\varepsilon = 0'',00159 = \frac{1}{626}$.

» » » » 24 $\varepsilon = 0'',00167 = \frac{1}{597}$.

Auch auf diese Resultate der Berechnung passen alle obigen schon bei Vergleichung der Ergebnisse für das Eisen gemachten Bemerkungen. Nur auf eines muſs ich aufmerksam machen: in allen Fällen, wo ich mit derselben Stange die Versuche doppelt machte, z. B. Versuch 11 und 12, 14 und 15, 16 und 17, 18 und 19, habe ich, ungeachtet aller erdenklichen Sorgfalt, stets einige Unterschiede in den Resultaten der Verlängerungsberechnung erhalten, was nach der Theorie nicht seyn soll; allein diese Theorie setzt voraus, daſs die Durchschnittsmaſse, besonders die Höhe des Prisma, auch richtig und vollkommen genau durch die ganze Länge der Stange dieselbe seyn soll; der Schmid aber, der mit solcher Genauigkeit arbeiten soll, wird wohl nicht zu finden seyn, weil sogar die Maſse so genau zu nehmen sehr schwer gefunden ist. Die kleinsten Unterschiede von der Höhe des Prisma machen, je kleiner dieselbe an sich ist, um so gröſsere, für die Praxis aber gewiſs bedeutungslosere Unterschiede.

Im Durchschnitte beweisen diese Resultate, um wie viel der Stahl das Eisen an Elasticität übertrifft; er kann beträchtlich mehr sich ausdehnen, und doch wieder seine alte Form, folglich auch seine vorige Länge einnehmen. Gehet selbst seine Ausdehnung über die Gränzen seiner Elasticität, wird die Stange abgerissen, so behält der Stahl noch die Kraft, seine Seitenform beizubehalten, die Zusammenziehung der Bruchwände hat nicht oder kaum Statt, während der Eisenbruch fast zu zwei Drittel, ja zur Hälfte seiner Fläche zugespitzet

wird, weil die von der äuſseren Gewalt ihm aufgezwungene Form bleibender ist.

Diese Eigenschaft des Stahles hat noch einen wichtigen Vortheil für die Anwendung bei Constructionen, die einer sogenannten lebenden Kraftwirkung, d. i. einem Stoſs ausgesetzt sind; der Stoſs wird weniger durch den starren Widerstand eines möglichst unelastischen Körpers, sondern bloſs durch die Nachgiebigkeit desselben in seinem Kraftmomente aufgehoben; eine Thatsache, die Jeder eingestehen wird, der jemals einen fallenden Körper beobachtet hat, wenn er auf einen elastischen Bund Stroh, statt auf Steine fiel; der weiche elastische Halm wird oft kaum beschädiget, während von demselben Stoſs ein fester Marmor, ja selbst eine guſseiserne Platte in tausend Trümmer zersplittert würde. Eben so wird der Stahl weniger durch einen Hammerstreich leiden und abspringen, als ein Eisenstab, vorausgesetzt, beide seyen im Durchschnitte gleich stark und gleich lang, und wohl zu merken, der Stahl sey nicht künstlich gehärtet.

Der Unterschied der Temperatur kann eben aus diesem Grunde, wie mir scheint, nicht so nachtheilig auf Stahl, als auf das minder elastische Eisen wirken, obwohl Viele das Gegentheil besorgen, und von diesem Umstande stets die erste Einwendung hernehmen, so oft von der Verwendung des Stahles zu Kettenbrücken die Rede ist. Freilich auch da hat man stets den gehärteten Stahl vor Augen, und führet Beispiele an, daſs man am Ende glauben müſste, eine zu der Nordpol-Expedition mitgenommene Messerklinge aus Stahl würde, wenn man einen Seehund zerlegen wollte, in der Faust des Jägers in Stücke springen. Zum Glück sind solche Facta nicht immer wahr, oder unrichtige, auch wohl gar keine

Beobachtungen vorhanden, warum ein Stahlstück selbst gehärtet in der oder jener Gelegenheit gesprungen ist.

Dem ungeachtet, aus wahrer Ehrfurcht gegen die Empirie, habe ich die Gelegenheit dieses Winters von 1827 zu 1828, der es am Wechsel der Temperatur wahrlich nicht fehlen liefs, dazu benützet, um auch hier einen practischen Versuch zu machen. Ich liefs nämlich eine Stahlstange, in Kärnthen zu Wolfsberg, in der Fabrik der Hrn. Gebrüder *Rosthorn* erzeugt, ungeachtet selbe nicht mehr als höchstens 0□'',52 Durchschnitt hatte, im Freien durch die ganze Zeit vom 15. November bis halben Februar d. J. ununterbrochen dem Zuge von 300 Centn. der Länge nach ausgesetzt, sie erfuhr doch nicht den geringsten Unfall oder Verlängerung; ja selbst als ein heftiger Orcan ein darüber hoch aufgestelltes Dach einstürzte, was freilich bei gelinderer Temperatur geschehen ist, litt sie dadurch doch nichts.

Zum Schlusse des Gegenstandes der Elasticitätsfähigkeit des Eisens und Stahles will ich nun alle die Resultate zur Übersicht zusammenstellen und vergleichen, dann auch zeigen, wie dieses nach meinen Versuchen gefundene Mittelverhältnifs zu jenem passe, was geschicktere Ingenieure und Physiker in dieser Beziehung gefunden haben.

Aus neun Versuchen für Eisen verschiedener Gattung ist das mittlere Verhältnifs der Ausdehnungsfähigkeit in den Gränzen der Elasticität

$$\varepsilon = 0'',001052 = \frac{1}{919}.$$

Bei den dreizehn Versuchen mit Stahl, eingerechnet die vier Nro. 16, 17, 18 und 19 mit damascirtem Stahl, der etwas eisenartiges hat, ist im Durchschnitt

$$\varepsilon = 0'',001641 = \frac{1}{609}.$$

Wenn man der Wahrheit oder der Anempfehlung einer Sache Glauben verschaffen will, so muſs man auch die kleinsten Nachtheile, die man durch Beobachtungen auffindet, nicht verschweigen, und darum will ich erinnern, daſs diese groſse Ausdehnungsfähigkeit des Stahles bei gewissen Gelegenheiten, z. B. bei seiner Anwendung zur Construction einer Kettenbrücke, ohne allen Zweifel tiefere Senkungen der Bahn selbst, also bedeutendere Schwingungen in verticaler Richtung hervorbringen wird, als eine gleich stark belastete Brücke von Eisen. Ich muſs mir vorbehalten, diesen Satz später noch durch Rechnung zu beweisen. Dagegen für Ankertaue kann es wohl unmöglich einem Zweifel unterworfen seyn, daſs der Stahl ein ungemein viel vortheilhafteres Material ist als Eisen, denn der in ewiger Bewegung und Stöſsen bestehende Kampf mit den Elementen ist wahrlich eine lebendige Kraft, und wird mit der so elastischen Rückwirkung, wie fast 2 gegen 1, leichter bestanden.

Es ist sehr Schade, daſs über den Stahl so wenige Versuche von anderen geschickten Physikern gemacht worden sind, oder wenigstens mir nicht bekannt waren, um zu vergleichen, wie selbe mit meinen Erfahrungen übereinstimmen. Hr. *Tredgold* (Seite 104, §. 95) führt einige nach Hrn. *Duleau* gemachte Versuche an, die umständlicher auch in Hrn. *Navier's Résumé des Leçons données à l'école royale des Ponts et Chaussees*, *Paris* 1826, *chez F. Didot* (Seite 42, §. 71) beschrieben sind.

Beide diese Schriftsteller geben zu erkennen daſs sie die Erfolge der Versuche für unregelmäſsig halten; allein es ist wohl schwer darüber zu urtheilen, denn von der ersten versuchten Gattung, nämlich englischem Guſsstahl, mit *Huntsmann* bezeichnet, ist z. B. ausdrücklich wenigstens in *Tredgold* gesagt, daſs er im ungetem-

perten Zustande versucht wurde; aber von der zweiten weiſs man nur, daſs es deutscher cementirter Stahl, mit *Foustmann* bezeichnet, war, ob gehärtet oder nicht, ist nicht gesagt. Überdieſs ist Cementstahl ein in verschlossenen Büchsen durch Ausglühen mit Kohlenstoff in Stahl verwandeltes Eisen; bei dieser Stahlerzeugung kommt sehr viel auf den Grad an, in welchem das Eisen mit Kohlenstoff gesättiget wird; etwas ganz anderes ist es, wo dieser Kohlenstoff, und noch überdieſs selbst andere Metalle, z. B. Mangan, schon von der Natur im Erze sind, wie es bei dem steiermärkischen und kärnthnerischen Spateisen, und besser gesagt Stahlerzen geschieht, das nach der Schmelzmanipulation schon aus dem Hochofen als vollkommener gleichartiger Stahl in Flossen kommt; in diesem Falle ist freilich weit mehr Gleichförmigkeit zu erwarten, wie meine Versuche beweisen.

Auch ist noch ein Umstand zu bemerken. Hr. *Duleau* hat mit ziemlich starken Stangen, besonders von deutschem Stahl, seine Versuche über die Beugung gemacht, und dabei ein verhältniſsmäſsig sehr geringes Gewicht, nämlich 10 Kilogramm = 17,85 Pf. unseres Gewichtes, als Last angewendet; seine Beugungen waren also sehr gering, und wie ich aus eigener Erfahrung weiſs, nicht leicht richtig zu bestimmen. Ich habe mir übrigens doch die Mühe gegeben, alle im *Navier's* Werke angegebenen Data der Versuche nach unserem Maſs und Gewicht zu berechnen, dann aber nach meinen Versuchen aus der höchsten Ausdehnungsfähigkeit $= \frac{1}{609}$ der Länge, und aus dem weiter unten vorkommenden höchsten Gewichtsverhältnisse, welches eine solche Ausdehnung zu Wege bringt, auszumitteln, wie viel die Beugungen der *Duleau*'schen Stangen erlitten haben würden,

wenn das verhältnifsmäfsig richtige Gewicht auf die Mitte der Stangen gelegt worden wäre; und da fand ich diesen Einflufs der Ungleichförmigkeit bei weitem weniger; aber so viel zeigte sich mir deutlich, dafs der Cementstahl wirklich noch die Natur des Eisens beibehalten hat, denn wenn man diesen mit den verhältnifsmässig gröfseren Gewichten belastet hätte, z. B. die Stangen im Versuche Nro. 4 mit 81 Pf., in Nro. 5 mit 317 Pf., in Nro. 6 mit 377 Pf., in Nro. 7 mit 361 Pf., und in Nro. 8 mit 470 Pf., so hätten sich die Stangen alle um $\frac{1}{500}$ der Länge ausgedehnt, und diefs hätten sie ohne bleibende Beugung gewifs nicht, ja kaum ohne Bruch ausgehalten; ein Beweis, dafs sie die Stärke des Stahls nicht hatten, also wahrscheinlich das, was wir Stahl nennen, nicht vollkommen war.

Die englische Gufsstahlstange, ganz auf dieselbe Art berechnet im Versuche Nro. 1 und 2 mit dem gehörigen Gewicht als Last, zeigte eine Verlängerung, die ganz vollkommen mit meinen Versuchen einstimmet, nämlich im Durchschnitte $\frac{1}{620}$ der Länge. Die höchste Last, welche ein solcher Stahl ohne Nachtheil der Elasticität aushalten kann, ist auf die Gröfse eines Quadratzoll-Querschnittes bei 500 Centn. W. G. berechnet; reducirt man den von Hrn. *Tredgold* in der kleinen Tafel (Seite 105) gegebenen Modulus der Elasticität = 34000000 Pf. a. v. d. p. Gewicht nach diesen Verhältnissen, so findet man, dafs auch er sein höchstes Tragvermögen ohne Nachtheil der Elasticität auf 58438 Pf. a. v. d. p. Gewicht beiläufig berechnet haben müsse. Im Gufsstahl ist überhaupt das Verhältnifs zwischen Eisen und Kohlenstoff richtiger, also auch der Stahl vollkommener, doch leider ist der Weg der Erzeugung zu kostbar, wenigstens

für den Aufwand zu grofsen Constructionen; wo uns aber in Österreich die Natur mit eben so gutem und höchst wohlfeilen Stahl hinlänglich versieht, wäre es eine unverantwortliche Vernachläfsigung, von diesem kostbaren Schatze nicht Gebrauch zu machen, und ich glaube, dafs es meine Pflicht ist, darauf durch meine Erfahrungen aufmerksam zu machen.

Nun wäre noch übrig, das Verhältnifs zwischen der Last, die eine Stange ohne Schaden und ohne bleibende Änderung ihrer Dimensionen tragen kann, zu derjenigen zu finden, die den Bruch bewirket. Weil aber die Abreifsungsversuche schon theils schwerer zu machen, theils mit der Zerstörung der versuchten Körper verbunden sind, so mangelt es noch an ganz richtigen Vergleichungen der beiden Gränzpuncte, nämlich dem Verhältnifs der unschädlichen Anstrengung zur zerstörenden oder den Bruch bewirkenden. Wo ich beides an derselben Stange versucht habe, will ich es auch anführen, und so gut als möglich diesen Abgang ersetzen. Die Rechnungsformel zur Ausmittelung von f (dessen Bedeutung oben angegeben wurde) ist folgende:

$$f = \frac{3\,L\,w}{2\,b\,h^2}.$$

Dieselbe, auf den Versuch Nro. 1 meiner Versuchstabelle angewendet, gibt:

$L = 46''$, $w = 225$ Pf., $b = 0'',5$, $h = 1''$,

daher die Formel in Ziffern:

$$\frac{3 \,.\, 46'' \,.\, 225 \text{ Pf.}}{2 \,.\, 0'',5 \,.\, 1''^2} = 31050 \text{ Pf.}$$

Für die übrigen Versuche gebe ich nun sowohl bei Eisen als später für Stahl nur den Werth f, den dann Jeder selbst nachrechnen kann, da er alle Data in der Tabelle finden wird.

Versuch	Nro.	2	$f =$	37185	Pf.
»	»	3	$f =$	23020	»
»	»	4	$f =$	33377	»
»	»	6	$f =$	20000	»
»	»	7	$f =$	21243	»
»	»	8	$f =$	20828	»
»	»	9	$f =$	20050	»
»	»	10	$f =$	20164	»

Diese Ergebnisse zusammen genommen geben für die Widerstandsfähigkeit des Eisens 25213 Pf.

Was den Versuch Nro. 2 belanget, so habe ich schon oben bei Gelegenheit der Verlängerungsberechnung gesagt, dafs ich die ausnehmende Güte dieser Stange dem Umstande zuschreibe, dafs selbe aus altem kleinen Eisen, unter dem sich auch vielleicht einiger Stahl befunden haben kann, verfertiget worden ist.

Ein weit auffallenderer Umstand aber ist mir bei dem Eisen der Stange, die zum Versuche Nro. 4 gebraucht wurde, vorgekommen; den, ungeachtet ich aufser Stande bin, die Thatsache derzeit noch genügend zu erklären, hier umständlich zu bemerken mir sehr nothwendig und nützlich scheint, um zu ähnlichen Versuchen Anlafs zu geben, welche die Sache vielleicht aufklären mögen. Es begegnete mir nämlich der Fall, dafs eine der für die Carlsbrücke bestimmten Stahlstangen während der Probe mit einem weit geringeren Gewichte, als sie tragen sollte, absprang, und da ich am Bruche durchaus keinen Fehler wahrnehmen konnte, so fand sich endlich, dafs wegen einer fehlerhaften Bohrung die angebrachte Gewalt des Probegewichtes in einer schiefen Richtung gegen die Längenachse der Stange gewirket hat, und ich mufste natürlich darin mit Übereinstimmung des Ausspruches obigen Grundsatzes (Seite 98) schliefsen, dafs dieses die Ursache des Bruches der Stange war. Um aber das

auch practisch zu beweisen, so liefs ich von dem nämlichen Eisen, welches zu dem Versuche in der Tabelle Nro. 4 gebraucht worden ist, kleine solche Stangen, wie sie für die Maschine brauchbar waren, verfertigen, welche die Leser dieser Zeitschrift aus dem dritten Bande derselben kennen.

Bei einer dieser Stangen liefs ich die Löcher, welche dazu dienen, um die Bolzen zur Befestigung aufzunehmen, wie gewöhnlich senkrecht auf die Achse der Länge bohren, bei der zweiten aber liefs ich die Hälfte des Loches in der Dicke an einer Seite ausreiben, so dafs, als die Stange eingespannt ward, der Zug offenbar schief durch die Achse gehen mufste. So eingerichtet schritt ich zum Abreifsungsversuche, und es waren zu meinem Erstaunen nicht weniger als 68 Pf. erforderlich, um endlich den Bruch zu bewirken, als die ordentlich gebohrte Stange versucht ward. Ich mafs den Querschnitt derselben auf das Genaueste, verglich auch das Gewicht eines Stückes von 1 Zoll Länge der abgerissenen Stange, welches 35 Gran betrug, und fand, dafs der Querschnitt durchaus nur 2□''',6, also eine Seite 1''',6 betragen hat. Das ist also der 55,38ste Theil eines vollen Quadratzolles im Querschnitte; rechnet man nun, dafs die Wirkung des Probehebels das 20fache des aufgelegten Gewichtes + dem eigenen Gewichtsmomente des Hebels selbst ist, so kommt auf eine so kleine Eisenstange das ungeheure Gewicht von 1480 Pf., die erforderlich waren, den Bruch zu Stande zu bringen, was also für solches Eisen auf den ganzen Quadratzoll-Querschnitt 82035 Pf. macht.

Dieser Erfolg ist aber um so gewisser erprobet, da auch die zweite solche Stange, ungeachtet einer unganzen Ader im Querschnitte, auf den Quadratzoll 61440 Pf., die dritte absichtlich falsch gebohrte 55200 Pf., und

die vierte ebenfalls falsch gebohrte 50176 Pf. auf den Quadratzoll Stärke bewiesen hat. Ein so kraftvolles Eisen ist mir durchaus noch nie vorgekommen, ungeachtet es im Übrigen alle Eigenschaften, besonders am Bruche, selbst die gewöhnliche conische Zusammenziehung der Ränder, die Weichheit, den faserigen, ziemlich dunkelgrauen Bruch an sich zeigte, also Eisen im eigentlichen Sinne war. Ob auch die anderen Gattungen Eisen, nämlich jene, die für f ein fast ähnliches Resultat gaben, wie die Stange Nro. 1 und 2, eine gleiche Zähigkeit unter gleichen Umständen beweisen werden, bin ich fast entschlossen, bei erster Gelegenheit zu versuchen. Es wäre höchst merkwürdig, die Ursachen auszumitteln, die das Eisen zu einer so bedeutenden Kraft erheben können; ich gestehe, daſs ich eine Beimischung von Stahl vermuthe, was ich um so mehr zu glauben Ursache habe, da die Stange, von der ich hier Erwähnung machte, in meiner Gegenwart in dem *Huber*'schen Stahlhammer zu Märzzuschlag aus derselben Esse geschmiedet worden ist, wo damals sonst durchaus nur Stahl gearbeitet worden ist. In steirischen Hämmern überhaupt werden die Flossen auf Stahl und Eisen aus denselben Badwerken genommen, und oft nur willkürlich in Stahl- und Eisenflossen sortiret, es ist also wohl sehr möglich, daſs sodann ein Mittelding von beiden bei dem Einrennen unter den Hammer kommt, und so das Eisen diese auſserordentliche Stärke dem fremden, aber gewiſs nur vortheilhaften Zusatz verdanket.

Von den Eisenstangen, welche ich zu Versuchen von der k. k. Hauptgewerkschaft erhalten habe, zeigte eine im Versuche Nro. 1 ebenfalls eine Belastungsfähigkeit von 31050 Pf., und eine ähnliche habe ich laut den gleich anfangs mitgetheilten Abreiſsungsversuchen, aber mit der groſsen Hebelmaschine gebrochen: dort zeigte

selbe nur eine dem Bruche widerstehende Kraft von 50280 Pf.; dieses, glaube ich immer, ist weniger als die eigentliche Kraft, denn diese große Maschine ist zwar für ihre Bestimmung, nämlich auf Kettenglieder mit einem Male jene Last wirken zu lassen, welche sie als Kette tragen sollen, ungemein vortheilhaft und gut gebauet, aber zu Versuchen, wo man die Gewichte immer nach und nach bis zum Äußersten vermehren muß, ist selbe etwas unbehülflich, und ungeachtet ich schon eine bedeutende Verbesserung daran in der Rücksicht angebracht habe, so ist doch noch das Nachtragen der großen Gewichte gegen Ende des Versuches mit Beschwerlichkeiten verknüpfet, die selbst nachtheilig auf die eingespannte Stange wirken können, und also den Bruch früher herbeiführen, als er durch das Gewicht bewirket worden wäre, das doch sein wahres Maß des Widerstandes zeigen soll.

Die höchste Widerstandsfähigkeit des Stahles, nach der Versuchstabelle berechnet mit derselben Formel, zeiget

für	den	Versuch	Nro.	11	$f = 50370$	Pf.
»	»	»	»	12	$f = 55327$	»
»	»	»	»	14	$f = 51060$	»
»	»	»	»	15	$f = 55327$	»
»	»	»	»	16	$f = 38640$	»
»	»	»	»	17	$f = 40020$	»
»	»	»	»	18	$f = 48500$	»
»	»	»	»	19	$f = 49684$	»
»	»	»	»	20	$f = 49730$	»
»	»	»	»	21	$f = 49730$	»
»	»	»	»	22	$f = 49730$	»
»	»	»	»	23	$f = 49730$	»
»	»	»	»	24	$f = 49730$	»

Ungeachtet die Versuche Nro. 16, 17, 18 und 19

eigentlich nicht mit vollkommenen Stahl, wie ich oben schon meine Meinung äuſserte, gemacht worden sind, und daher auch ein geringeres Widerstandsvermögen haben, so will ich doch aus allen dreizehn Versuchen das Durchschnittsverhältniſs mit $f = 49044$ Pf. annehmen. In der Ausführung der Kette für die Carlsbrücke ging ich noch sicherer, und blieb bei der Anwendung von 40000 Pf. Widerstandsfähigkeit stehen, obwohl die Last als Wirkung auf die Kette ebenfalls noch bedeutend höher angenommen und berechnet ist.

Ich machte noch auſserdem einen Versuch, welchen ich wegen seiner Einfachheit als ein sehr schickliches Mittel, die Tragfähigkeit auszumitteln, zur häufigen Anwendung und Wiederholung, um diese gewiſs nützlichen Erfahrungen weiter auszubreiten, Jedermann anrathe.

Ich nahm eines der für die Carlsbrücke bestimmten Kettenglieder, welches auf die breite Seite auf zwei feste Auflagen, in der Entfernung von 61″,5, niedergelegt wurde; es hatte auf diese Art eine Horizontalbreite von 2″, und eine Höhe von 0″,5833. Auf die Mitte der Entfernung der Abstände brachte ich mittelst der gewöhnlichen Wagschale das Gewicht derselben, und das halbe Gewicht der Stange selbst eingerechnet, eine Last von 155 Pf., lieſs so das Ganze durch einige Stunden stehen, und maſs nun die Tiefe der auf der Stange entstandenen Krümmung, welche = 0″,654 gefunden ward. Nun berechnete ich aus dem angewendeten Gewichte 155 Pf., mit welcher unschädlichen Anstrengung dieser Stahl auf die Basis eines Quadratzolles - Querschnitt belastet war, und bezeichne dieses Ergebniſs durch f', die Last 155 Pf. $= w'$.

$$f' = \frac{3 \cdot L w'}{2 b h^2} = 21061 \text{ Pf.}$$

Offenbar ist nun dieses weit unter dem oben im

Durchschnitt für Stahl berechneten $f = 49044$; da sich aber $f' : f = w'$ zu der unbekannten Last verhält, die eigentlich auf die Mitte gelegt werden sollte, so wollen wir diese mit W bezeichnen, und werden finden

$$W = \frac{f w'}{f'} = 367 \text{ Pf.}$$

Nun frägt es sich: Welche Beugung hatte denn diese Belastung hervorgebracht? Die Beugungen unter gleichen Umständen des Versuches auf dieselbe Stange verhalten sich inner den Gränzen der Elasticität, wie die aufgelegten Gewichte, also $w' : d' = W : D$, daher

$$D = \frac{d' W}{w'} = \frac{0'',654 \;.\; 367 \text{ Pf.}}{155 \text{ Pf.}} = 1'',586.$$

Aus dieser Beugung D das Verhältnifs der Verlängerung gesucht durch die bekannte Formel

$$\varepsilon = \frac{3 h D}{2 l^2} = \frac{3 \,.\, 0'',5833 \,.\, 1'',586}{2 \,.\, 30'',75^2} = 0'',0001645 = \frac{1}{606}\,;$$

Da dieses Verlängerungsverhältnifs mit dem oben im Durchschnitt für Stahl berechneten fast ganz übereinstimmt, so zeiget sich klar, dafs auch bei diesem verhältnifsmäfsig geringen Gewichte von 155 Pf., und der dabei beobachteten Krümmung, sich alle Verhältnisse der wahren Stärke solcher Stangen, aus was immer für Material, ergeben, wovon einmal der Werth von f und ε bekannt ist.

Ein Mehreres hierüber in diesen Aufsatz einzuschalten, da selber eigentlich nur die Resultate meiner Versuche zum Zwecke hat, scheinet nicht an seinem Platze zu seyn; allein beide oben angeführten Werke der Herren *Tredgold* und *Navier* enthalten so viel Nützliches und Bestimmtes darüber, dafs es nicht genug empfohlen werden kann, sich mit selben vertraut zu machen.

Ich habe in diesem Aufsatze weiter oben gesagt, dafs durch Rechnung zu beweisen sey, dafs der Stahl,

ungeachtet er, in den Gränzen seiner Elasticität belastet, bei weitem mehr Widerstand leistet, als in eben diesen Gränzen Eisen, doch sich unter gleicher Last mehr verlängert. Diese Berechnung, auf alle früheren Versuche gestützet, will ich in Kürze noch anfügen, da wir in den Fall kommen können, von solchen Erfahrungen Gebrauch zu machen.

Eine Stahlkette an einer Brücke, welche z. B. 50 Klafter lang wäre, bestimmt, eine Last von 5000 Centner inner den Gränzen ihrer Elasticität zu tragen, müſste bei der Gröſse der Tragfähigkeit des Stahls von 50000 Pf. auf einen Zoll Querschnitt 10 Quadratzoll stark seyn, und würde sich um $\frac{1}{609}$ ihrer Länge ausdehnen, also um 5″,9 länger werden, sobald sie mit dem Gewicht der 5000 Centner beladen wird. Dagegen, wenn die Kette von Eisen gemacht würde, so ist, da ihre Elasticität nur 25000 Pf. auf den Quadratzoll-Querschnitt beträgt, eine Stärke der Kette von 20□″ nöthig, und diese würden sich mit gleicher vollen Last um $\frac{1}{919}$ ihrer Länge ausdehnen, also die Kette nur um 3″,91 länger werden. Aber nicht nur bei dieser, der Widerstandskraft beider Ketten angemessenen höchsten Belastung, sondern auch bei der weit geringeren von 1000 Centner wird die Stahlkette sich bei ihrer Stärke von 10□″ um 1″,18, die Eisenkette aber nur um 0″,78 verlängern, die verticalen Oscillationen der Bahn daher sich wie ungefähr 1 : 1,5 verhalten.

So selten die Versuche sind, welche bisher über die Eigenschaften des Stahles von anderen Physikern unternommen worden sind, so habe ich doch, und zwar von Hrn. *Tredgold* selbst, ein Paar solche in Beziehung der seitlichen Belastung in einem englischen Journale

gefunden, was den Titel *Repertory of arts and manufactures, May* 1825, führt, die ich nicht nur zur Beleuchtung meiner eigenen obigen Versuche und der daraus hergeleiteten Rechnungs-Resultate, sondern vorzüglich zur Aufklärung des Verhältnisses von Stahl im gehärteten Zustande diesem Aufsatze noch anfügen will.

Hr. *Tredgold* nahm einen Stahlbarren, der geschmiedet, dann durch ein Walzwerk gleichgestreckt und so weit gehärtet war, daſs er der Feile widerstand, legte selben auf zwei um 12″,534 Wiener Zoll entfernte Auflagen, und zwar so, daſs dessen aufliegende Flächen 0″,9159 Breite, die vertical stehenden aber 0″,3598 Höhe hatten; bei diesem Stabe, in seiner Mitte mit 439 Pf. Wien. Gew. belastet, war eine Beugung von 0′,0864 bemerklich, welche bei Abnahme der Last gänzlich verschwand. Wird nun nach oben gezeigten Formeln zuerst die Verlängerung berechnet, so ist

$$\varepsilon = 0'',001187 = \frac{1}{842},$$

und die höchste für diesen Zustand des Stahles der Elasticität unschädliche Belastung auf die Basis eines Wiener Zolles $f = 69570$;

daher jene Gewalt, welche nöthig wäre, um ein Prisma dieses Stahles um seine Längeneinheit, die bei uns einen Wien. Zoll seyn soll, zu verlängern oder zu verkürzen, und die Hr. *Tredgold* den Modulus der Elasticität nennet:

$$= \frac{f}{\varepsilon} = \frac{69570 \text{ Pf.}}{\frac{1}{842}} = 58,586000 \text{ Pf.}$$

Dann untersuchte Hr. *Tredgold* eine zweite Stahlstange, die aber nicht gehärtet war, und so wie jene, die ich zu meinen Versuchen brauchte, der Feile leicht nachgab.

Bei diesem Stabe waren die Auflagen 23'',13 entfernt, die Breite desselben, auf der er lag, 0'',887, und die Höhe der Seitenflächen 0'',347. Ein in der Mitte aufgelegtes Gewicht von 173 Pf. bewirkte eine Beugung von 0'',6. Aus diesen Angaben die Verlängerung berechnet, so ging selbe $\varepsilon = 0'',001978\ \frac{1}{505}$ hervor, schwand aber bei abgenommenem Gewichte ganz.

Für das bekannte Maſs der Widerstandsfähigkeit eines Quadratzolles $f = 56194$ Pf., und aus beiden zusammen den Modulus der Elasticität

$$\frac{f}{\varepsilon} = 28401000.$$

Hr. *Tredgold* ging noch weiter in diesen, alle Aufmerksamkeit verdienenden Versuchen, und entdeckte noch folgende Umstände.

Die erste Stange zeigte unter derselben Last dieselbe Beugung, wenn

1. selbe bis zur rothgelben Strohfarbe abgelassen wurde.
2. Auch noch, wenn der Stahl bis zur blauen Farbe abgelassen war. Wurde sie
3. aber durch Rothglühen gehitzet, und dann sehr allmählich abgekühlt, so zeigte zwar eine Last von 196,35 Pf. noch keine bleibende Krümmung, doch scheinet es, daſs man nicht viel weiter mit der Belastung gehen durfte.
4. Wurde selbe nun neuerlich gehitzet und auf das stärkste gehärtet, so brachte erst eine Last von 624 Pf. eine Beugung von 0'',00482, die bleibend war, zu Wege; die Vermehrung der Last um 17,85 Pf. vermehrte die bleibende Krümmung um gleiche 0'',00482, endlich brach sie ganz ab unter der Last von 1035 Pf.

Die zweite Stange, als sie gehärtet worden war, daſs sie der Feile widerstand:

1. unter gleicher Belastung wie das vorige Mal gleiche Beugungen.
2. Ward sie bis zur strohgelben Farbe des Stahles abgelassen, so brachten 232 Pf. zwar keine, dagegen 267 Pf. schon eine bleibende Krümmung hervor, und mit 687 Pf. brach die Stange ab.

Sobald es Zeit und andere Geschäfte zulassen, werde ich Versuche dieser Art ebenfalls unternehmen, und selbe mitzutheilen nicht ermangeln.

Es beruhiget mich übrigens sehr, daſs meine Resultate so nahe mit denen Hrn. *Tredgold's* übereinstimmen, und läſst mich mit Grunde hoffen, daſs das von mir gewählte Versuchsverfahren ziemlich das richtige seyn dürfte.

II.

Physikalisch - chemische Untersuchung der Trinkquelle, Vincentiusbrunnen, zu Luhatschowitz in Mähren;

von

Joh. Planiawa.

Wenn sich gleich in dem binnen kurzer Zeit durch sein Mineralwasser so berühmt gewordenen Luhatschowitz vier verschiedene Quellen befinden, und eine physikalisch-chemische Untersuchung schon aus dem Gesichtspuncte betrachtet, »daſs sie alle denselben Grundursprung haben,« verdienten: so lieſsen doch die Stunden meiner Muſse dieses keineswegs zu, und ich war

somit genöthiget, mein Augenmerk nur auf Eine, aber auch auf die Wichtigste zu richten. Das aus dem Vincenzbrunnen geschöpfte Wasser, welches in so grofser Menge in alle Provinzen der österreichischen Monarchie, ja sogar ins Ausland verführt und allgemein gerühmt wird, war es nun, welches ich einer physikalisch-chemischen Untersuchung unterzog.

Wenn gleich dieses Heilwasser schon früher von Mehreren, namentlich Sr. Excellenz dem Herrn Grafen v. *Mittrowsky*, Herrn M. Dr. *Spenkuch*, und dem ehemaligen k. k. Physikus des Hradischer Kreises, Herrn M. Dr. *A. F. Kiesewetter* auf seinen Gehalt an mineralischen Substanzen untersucht wurde, so hielt ich eine dem gegenwärtigen Stande der chemischen Wissenschaft gemäfs durchgeführte Analyse nicht für überflüssig, und gelangte wirklich in der Folge zu der Überzeugung, dafs sie nicht nur nicht überflüssig, sondern sogar nöthig sey.

Die von mir darin entdeckten Stoffe, namentlich das Jod, Brom und Fluor, ferner das Kalium-, Baryum-, Strontium-, Siliciumoxyd und das Manganoxydul waren als dessen Bestandtheile nicht bekannt, wenn gleich erst die Kenntnifs ihres Vorhandenseyns den Heilkünstler in den Stand setzt, sich die bereits bekannten Wirkungen des Wassers auf den Organismus mit bestimmter Gewifsheit zu erklären, und mit Sicherheit auf die bisher noch unbekannt gebliebenen zu schliefsen.

Das Vorhandenseyn der vier Salzbilder aber ist besonders für den Forscher der Natur von sehr grofser Wichtigkeit. Einmal, und zwar die Gegenwart des Jods und des Broms, weil diese anscheinend nur dem Meere angehörenden Stoffe, die nur in sehr wenigen Mineralwässern Europas gefunden wurden (und in denen das Jod nicht selten in so geringer Menge vorkommt, dafs es kaum durch Reagentien zu entdecken ist), sich im-

mer mehr und mehr auch als ein Eigenthum des Festlandes erweisen. Aber weit wichtiger ist das Vorkommen aller in einer anderen Beziehung. Seit der ersten Entdeckung des Jods in Mineralwässern war ich nämlich der Meinung, dafs dieser Stoff ein beständiger Begleiter des Chlors seyn müsse, und seitdem Hr. *Balard* das Brom in dem, an Chlorsodium so reichen, Meerwasser entdeckte, ging ich zu der umfassenderen Meinung über, dafs nicht nur diese Dreie, sondern auch das Fluor als viertes Halogen, stets als wechselseitige Begleiter auftreten müssen. Von dieser vorgefafsten Meinung ausgegangen, suchte ich erst das Jod in unserem Mineralwasser, und durch den glücklichen Erfolg aufgemuntert auch das Fluor, welches sich schon durch das Angefressenwerden der Verdünstungsgläser deutlich kund gab. Das Vorhandenseyn aller Dreie bestimmte mich endlich, dem Brom nachzuspüren, und mehrfach angestellte Versuche haben auch da meine Bemühungen mit einem glücklichen und meiner Annahme günstigen Resultate gekrönt. (Auch in dem salzreichen Wasser der neu errichteten Badeanstalt zu Napagedl bei Hradisch fand ich in Verbindung mit dem k. Kreisarzte, Herrn M. Dr. *Alois Carl*, etwas Jod.)

Sollte sich nun diese wechselseitige Begleitung der Salzbilder auch in anderen Mineralwässern erweisen, was zu bezweifeln ich bei fernerem Nachdenken über diesen Gegenstand immer weniger Grund finde, so scheint die Natur selbst hiemit einen Fingerzeig zu geben, »dafs vielleicht diese vier analogen Stoffe als verschiedene Modificationen eines und desselben Grundstoffes fortwährend in einander übergehen, und somit unter verschiedenen Formen und Verhältnissen, immer mehr oder weniger, als wechselseitige Begleiter auftreten müssen.« Übrigens wird man aus der Existenz dieser und der an-

deren in unserem Wasser gefundenen Stoffe auch auf die gleichzeitige Existenz fester Verbindungen derselben in der Nähe dieser Quellen hingewiesen, und dem Mineralogen öffnet sich dann ein neues Forschungsfeld am vaterländischen Boden.

I. Physikalische Untersuchung der Trinkquelle.

1. Temperatur.

Die Temperatur dieses Wassers ist bei + 25° Cels. Luftwärme = + 13,75° Cels. gefunden worden. Zur Winterszeit soll dieselbe kaum 2° niedriger seyn, so daſs das Wasser im Brunnen, selbst bei der strengsten Kälte, nicht gefriert.

2. Specifisches Gewicht.

Die Bestimmung des specifischen Gewichtes dieses Mineralwassers im frisch geschöpften Zustande wird durch das starke Blasenwerfen desselben unmöglich gemacht. Dem zu Folge wählte ich hierzu ein etwas an der Luft abgestandenes Wasser, welches ich in einem kleinen mit einem gut eingeschliffenen Stöpsel versehenen Fläschchen, mehrmal mit destillirtem Wasser vergleichend, wog; hierdurch fand ich das specifische Gewicht desselben = 1,00766, jenes des destillirten Wassers bei + 17,5° Cels. = 1,00000 gesetzt. (Zu einer anderen Zeit habe ich sein spec. Gewicht = 1,008035 als Mittel mehrerer ebenfalls sehr genauer Versuche gefunden, was für eine Veränderlichkeit des Salzgehaltes desselben spricht, und die ich auch in zu verschiedenen Monaten geschöpftem Wasser gefunden habe.)

3. Durchsichtigkeit.

Frisch aus der Quelle geschöpft ist dieses Wasser vollkommen klar und durchsichtig, entwickelt fortwäh-

rend Kohlenstoffsäuregas in grofser Menge, welches sich an der ganzen Innenfläche des Gefäfses in Bläschen ansetzt, und dann in die Höhe steigt. Steht es aber nur eine kurze Zeit mit der Atmosphäre in Berührung, so bekommt es ein gelblichbraunes glänzendes Oberhäutchen (entstanden durch die höhere Oxydation des darin vorhandenen Eisenoxyduls durch das atmosphärische Oxygen), welches sich dann als ein gelbbrauner pulveriger Niederschlag zu Boden setzt. Steht es längere Zeit mit der Atmosphäre in Berührung, so verliert es mit dem gröfsten Theile seiner Kohlenstoffsäure auch seine Durchsichtigkeit, weil die durch dieselbe aufgelöst erhaltenen Erden sich als Subcarbonate an den Wänden und am Boden des Gefäfses absetzen, wobei das Wasser auch ein dergleichen Häutchen bekommt. Wird aber ein mit Kohlenstoffsäuregas gefülltes Gefäfs unter dem Wasserspiegel der Quelle damit gefüllt, und gut verschlossen, so behält es so lange seine vollkommene Klarheit und Durchsichtigkeit, als dem Sauerstoff aller Zutritt verwehrt, und das Entweichen des Kohlenstoffsäuregases verhindert wird.

4. Geschmack.

Zu bekannt ist jedem Badegaste der sehr angenehme und erfrischende Geschmack dieses Wassers unmittelbar an der Quelle, welchen es, auch versendet, doch nur zum Theil beibehält, weil man bei dem Füllen die Flaschen nicht sogleich verstopft, um ihr Zerspringen zu verhindern, wodurch es also eine sehr grofse Menge an Kohlenstoffsäuregas verliert, wefshalb auch das bekanntlich von Kohlenstoffsäuregas herrührende Prickeln in der Nase bei dem frisch geschöpften Wasser in einem viel höheren Grade als in dem versandten wahrgenommen wird.

5. Geruch.

Dieses Wasser ist vollkommen geruchlos. Das stark prickelnde Gefühl in der Nase rührt bekanntlich von dem Kohlenstoffsäuregas her. Bei feuchter Witterung wollen Viele einen Schwefelwasserstoffgeruch darin bemerkt haben, obgleich es keine schwefelsauren Salze enthält.

6. Gasentwickelung aus dem Wasser.

Durch die ununterbrochen aufsteigenden gröſseren und kleineren Gasblasen wird die Quelle im beständigen Aufwallen erhalten, wobei manche Gasblasen oft so stark sind, daſs sie einen Raum von mehreren Kubikzollen einnehmen. Da ich keine Gelegenheit hatte, die chemische Constitution dieses Gases kennen zu lernen, so behalte ich mir die Analyse desselben für eine schicklichere Zeit vor, und werde nicht ermangeln, die Resultate derselben in dieser Zeitschrift bekannt zu machen.

7. Absatz an den Abfluſskanälen.

Dieser ist gelblichweiſs, stellenweise bräunlich, so daſs die einen Schichten desselben beinahe weiſs sind, während andere immer dunkler und dunkler erscheinen, und sich endlich ins Braune verziehen, aus dem sie wieder stufenweise in das Weiſse zurückkehren. Sein Gefüge ist theils derb, theils körnig, theils pulverig und nicht selten auch krystallinisch, wornach sich auch sein Cohäsionszustand richtet. Er besteht aus den mittelst der Kohlenstoffsäure in dem Mineralwasser aufgelöst gewesenen Metall- und Metalloidoxyden im kohlenstoffsäuerlichen Zustande, und entsteht dadurch, daſs sich das bei der Berührung der Atmosphäre schnell bildende Eisenoxyd und das Manganoxyd als kohlenstoffsäuerliche Hydrate absetzen, denen später beim steigenden Verluste an Kohlenstoffsäure die durch dieselbe aufgelöst

gewesenen Erden, ebenfalls im kohlenstoffsäuerlichen Zustande, nachfolgen, und um so eisenfreier, also ungefärbter sind, je später sie niederfallen. Von der mehr oder weniger langsamen Ausscheidung der Kohlenstoffsäure und der mehr oder weniger ruhigen Beschaffenheit des Wassers hängt es ab, ob dieser Niederschlag die Krystallform annimmt, oder aber als derber, körniger oder pulveriger Ansatz in den Rinnen erscheint.

II. Chemische Untersuchung der Trinkquelle.

1. Prüfung durch Reagentien.

a. Prüfung des frisch geschöpften, so wie auch des abgekochten Wassers.

1. Frisches Wasser röthete schnell das Lackmuspapier; die Farbe verschwand jedoch nach dem Trocknen ganz. Eben so wurde Lackmustinctur stark geröthet.

2. Kurkumäpapier wurde im frischen Wasser leicht gebräunt; im gekochten fand aber die Bräunung sehr stark Statt.

3. Geröthetes Lackmuspapier wurde im gekochten Wasser sogleich blau.

4. Lilienpapier wurde im gekochten und ungekochten Wasser schön lichtgrün gefärbt.

5. Fernambukpapier wurde durch dasselbe ebenfalls bleibend gebläut.

6. Säuren brachten durchgehends ein sehr starkes Aufbrausen, selbst in dem an der Luft durch mehrere Stunden abgestandenen Wasser, hervor.

7. Im Wasser gelöstes Cyaneisenkalium brachte erst keine, später eine blaue Färbung hervor, die jedoch bald wieder verschwand, weil das gebildete Cyaneisen wieder von dem im Mineralwasser vorhandenen Alkali zersetzt wurde. Eine vorhergegangene Sättigung des

Alkalis mit Essigsäure bewirkte, dafs die blaue Farbe blieb, die, wie natürlich, durch höhere Oxydation des Eisens an der Atmosphäre immer intensiver wurde. Auch in wohlverschlossenen versandten Flaschen findet noch eine blaue Färbung in mehr oder weniger hohem Grade Statt. Gekochtes Wasser blieb farbenlos.

8. Ein mit Holz zerschlagener Gallapfel färbte frisches Wasser purpurroth, später violett, und dann blauschwarz. Im gekochten fand blofs die durch das Alkali hervorgerufene schmutzig grüne Färbung nach einiger Zeit Statt.

9. Kalkwasser erzeugte, mit der Hälfte seines Volumens des Wassers gemischt, augenblicklich eine starke Trübung, und bald setzte sich ein weifser Niederschlag in Menge ab.

10. Alkohol in dem Verhältnisse von 2 : 1, und Äther in dem Verhältnisse von 1 : 4, wurden mit demselben gemischt. Nach Verdünstung der geistigen Flüssigkeiten war kein fettes oder harziges Oberhäutchen wahrzunehmen.

11. Frisch geschöpftes, abgestandenes, so wie auch gekochtes Wasser mit etwas Stärkekleister gemischt und mit Salpetersäure übersättigt, wurde nach etwa drei Minuten violett, später prächtig rosenroth, und liefs einen dergleichen voluminösen Bodensatz fallen. Ein geringeres Quantum von Stärkekleister brachte eine schöne dunkelblaue Färbung mit einem dergleichen Bodensatze hervor.

12. Kohlenstoffsäuerliche Alkalien brachten in dem Wasser eine bedeutende Trübung hervor. Mit reinen Alkalien war diese Trübung augenblicklich viel stärker. Gekochtes und rein filtrirtes Wasser wurde nicht getrübt.

13. Kohlenstoffsaure Alkalien brachten in dem gekochten und abfiltrirten Wasser keine Trübung hervor.

b. Prüfung des mit Essigsäure etwas übersättigten Wassers.

14. Im Wasser gelöstes salpetersaures Silberoxyd brachte in dem Wasser einen häufigen blendend weifsen käsigen Niederschlag hervor. Ein Strich ins Bräunliche konnte bei aller Vorsicht nicht bemerkt werden, ein Beweis, dafs keine Humussäure oder irgend eine andere organische Substanz vorhanden sey.

15. Im Wasser gelöstes Chlorine-Baryum brachte nicht die mindeste Trübung hervor, selbst nicht nach längerem Stehen. Eben so verhielt sich das deutazotsaure Baryumoxyd.

16. Oxalsaures Kaliumoxyd brachte eine starke Trübung hervor. Der später gebildete häufige Niederschlag löste sich in Deutazotsäure vollkommen auf.

17. Eine gewisse Quantität des mit Essigsäure gesättigten Wassers wurde mit oxalsaurem Ammoniak gefällt, der Niederschlag durchs Filtriren abgesondert, und die Flüssigkeit hierauf mit basisch phosphorsaurem Ammoniak versetzt; es entstand eine leichte Trübung, die sich später zu einem spärlichen krystallinischen Niederschlag ausbildete, der nach etwa zwei Tagen häufiger wurde.

18. Im Wasser gelöstes Anthrazothion-Kalium brachte anfangs keine Färbung hervor; doch nach längerem Stehen an der Luft nahm man, gegen weifses Papier gehalten, eine leichte Röthung wahr.

c. Prüfung auf Kaliumoxyd, und die während des Kochens niedergefallenen Erden.

19. Einige Unzen des Wassers wurden bis zur Trockne verdünstet, mit wenig Wassers behandelt, die Flüssigkeit vom Bodensatze getrennt, mit Hydrochlorinesäure gesättigt, und hierauf mit Platinchloridlösung versetzt; es entstand ein krystallinischer Niederschlag

von Chlorine-Platinkalium in bedeutender Menge. Wasser, welches zu verschiedenen Zeiten geschöpft worden, lieferte immer denselben Niederschlag, zum Beweise, daſs das Kaliumoxyd kein periodischer Bestandtheil desselben sey.

20. Der durchs Kochen aus dem Wasser gefällte Niederschlag wurde feingepulvert in einem reinen Silbertiegel mit Deutoxythionsäurehydrat übergossen und etwas erwärmt, nachdem man den Tiegel mit einem mit Kupferstechermasse überzogenen Uhrglase, in welche ein Name einradirt war, vorher bedeckte. Nach einigen Minuten wurde Letzteres abgenommen, und erst mit Wasser, dann aber die fettharzige Materie mit Äther abgewaschen, worauf sich fand, daſs Hydrofluorinsäure vorhanden gewesen sey: denn der Name war sehr deutlich zu lesen, ja er war so tief, daſs man mit einer Nadel in den Zügen herumfahren konnte, ohne auszugleiten. Daſs nicht Schwefelsäure auf das Glas wirkte, hat ein Nachversuch gelehrt.

21. Mit Hydrochlorinesäure behandelter Niederschlag lieſs nach dem Einkochen der Flüssigkeit und Wiederauflösen der trockenen Masse Siliciumoxyd zurück.

22. Die von dem Siliciumoxyd getrennte Flüssigkeit wurde sehr stark von allen Reagentien auf Eisenoxyd afficirt.

23. Da Phosphorsäure und Hydrofluorinesäure einander wechselseitig zu begleiten pflegen, so wurde eine halbe Maſs des Wassers verdünstet, mit einem Übermaſse von Kalkwasser versetzt, und die Flüssigkeit zur Klärung hingestellt; der hierdurch erhaltene Niederschlag wurde nun in Salpetersäure aufgelöst, die Auflösung filtrirt, mit Ammoniak neutralisirt, und hierauf mit essigsaurem Bleioxyd versetzt, worauf sich, selbst nach längerer Zeit, kein Niederschlag bildete, woraus

sich auf die völlige Abwesenheit der Phosphorsäure schließen läßt.

Aus diesen Präliminäruntersuchungen der Luhatschowitzer Trinkquelle geht hervor, daß sie folgende Stoffe im gelösten Zustande enthalte:

1. Carbonsäure,
2. Hydrofluorinesäure,
3. Hydrochlorinesäure,
4. Hydrojodinesäure,
5. Kaliumoxyd,
6. Sodiumoxyd,
7. Calciumoxyd,
8. Magniumoxyd,
9. Siliciumoxyd,
10. Eisenoxydul,

und wie sich aus dem Verfolge der Analyse ergeben wird:

11. Hydrobromsäure,
12. Baryumoxyd,
13. Strontiumoxyd,
14. Manganoxydul.

Die Bestimmung der quantitativen Verhältnisse dieser Stoffe, so wie die Art und Weise, wie sie mit einander verbunden sind, ist den folgenden Blättern vorbehalten. Hierbei muß ich übrigens noch bemerken, daß ich die Wasserstoffsäuren nicht als solche, sondern bloß ihre Grundstoffe in Verbindung mit den metallischen Basen der ihnen entsprechenden Oxyde, aus einem weiter unten anzugebenden Grunde, anführen werde.

2. Quantitative Bestimmung der Bestandtheile der Trinkquelle.

a. Quantitative Bestimmung der gasförmigen Bestandtheile.

1. Da ich selbst nicht Gelegenheit hatte, das Wasser an der Quelle auf seinen Gasgehalt zu prüfen, so

nahm ich die mir bisher als die genauesten Resultate bekannten Bestimmungen des Hradischer k. Kreisphysikus, Herrn M. Dr. *Alois Carl*, welche er mir vor einigen Jahren gütigst mittheilte, an. Seinen Versuchen zu Folge ist das Gas ganz reine Kohlenstoffsäure, und beträgt in 9 Kubikzollen Wassers, bei $+ 16{,}25^0$ Cels. und 28,50 W. Z. Barometerstand gemessen, 13,5 Kubikzolle. Da hier aber weder Barometer- noch Thermometerstand normal sind; so ist, in Bezug auf den normalen Barometerstand von 28 Par. Zolle, das Gasvolumen = 13,37, und mit gleichzeitiger Correctur für die Temperatur von 0^0 Cels. = 12,602 Wien. Kub. Z. Es sind nämlich

28,5 Wien. Zolle = 27,734 Par. Zolle, folglich

I. $$28 : 27{,}734 = 13{,}5 : x \quad \text{und}$$

$$x = \frac{27{,}734 \times 13{,}5}{28} = 13{,}37 \text{ Wien. Kub. Zollen}$$

bei 28 Par. Z. und $+ 16{,}25^0$ Cs.; ferner

II. $13{,}37 : (1 + 0{,}00375)\, 16{,}25 = 12{,}602$ Wien. Kub. Z. bei 28 Par. Z. und 0^0 Cs.

2. Da man nun das Kohlenstoffsäuregas als eine Auflösung des Kohlenstoffdunstes im Sauerstoffgase betrachten kann, das spec. Gewicht des letzteren = 16,00 (jenes des Wasserstoffgases = 1,00 gesetzt), und der stöchiometrische Werth des ersteren = 44,25, folglich sein spec. Gewicht $= \frac{32 + 12{,}25}{2} = 22{,}125$ ist, und 1 W. K. Z. Wasserstoffgases 0,02245 Gr. wiegt; so ist das Gewicht von 12,602 Wien. Kub. Z. Kohlenstoffsäuregases = 6,25949 Gr., weil

$$(22{,}125 \times 0{,}02245) \times 12{,}602 = 6{,}25949 \text{ ist.}$$

3. Nun wurden aber diese 6,25949 Gr. Kohlenstoffsäuregas aus 9 K. Z. oder (mit Berücksichtigung des spec. Gewichtes des Wassers) aus 2270 Gr. Wassers erhal-

ten; dem zu Folge entsprechen 10,000 Gr. unseres Mineralwassers 27,5748 Gr. derjenigen Kohlenstoffsäure, welche beim Kochen entwickelt wird, und die in der Folge um so viel vermehrt werden muſs, als an die Alkalien und Erden, um sie im kohlenstoffsäuerlichen Zustande zu erhalten, gebunden zurückgeblieben ist.

b. Quantitative Bestimmung der festen Bestandtheile des Wassers.

4. 10,000 Grane Wassers, welches im August 1827 geschöpft worden ist, wurden, nachdem die Kohlenstoffsäure sich durch Aussetzen an die Luft gröſstentheils verflüchtigte, in einer Glasschale bei gelinder, niemals den Kochpunct erreichender, Temperatur zur Trockne verdünstet. Das in der Schale Zurückgebliebene wurde mittelst eines abgerundeten und polirten scharfen Stahlmessers herausgenommen, und in einen reinen Silbertiegel gethan, wozu auch noch das Wasser, womit die Schale ausgespült wurde, kam. Nun wurde der Tiegel zuerst über einer Weingeistlampe bis zur gänzlichen Verknisterung des Chlorinesodiums erhitzt (wobei ich die Vorsicht beobachtete, ihm eine möglichst schiefe Stellung zu geben, um jedem Salzverluste durchs Ausspritzen vorzubeugen), dann aber im offenen Feuer der Rothglühhitze ausgesetzt. Die Salzmasse schmolz vollkommen, und wurde in diesem Zustande 5 — 8 Minuten erhalten. Geschmolzen erschien sie lichtgrün, nahm aber nach dem Auskühlen eine erst gelblich-, später weiſsgrüne Farbe an; sie wurde noch heiſs gewogen, und betrug nach Abzug des Gewichtes des Tiegels 65,70 Gran.

5. Der erhaltene Wasserrückstand wurde nun mit heiſsem destillirten Wasser ausgelaugt, das Ganze aufs Filtrum gegossen, die erhaltene klare Flüssigkeit im Silbertiegel verdünstet, das Salz bei Beobachtung der oben

angeführten Vorsicht scharf ausgetrocknet und hierauf im Kohlenfeuer geschmolzen, wobei es ruhig flofs, und nach dem Auskühlen kaum merklich einen Stich ins Gelbliche hatte. Noch heifs gewogen fand man sein Gewicht = 58,70 Gran. Es wurde neuerdings im Wasser gelöst, um es von dem durch das Sodiumoxyd stets aufgelöst erhaltenen geringen Antheile Magniumoxyds zu befreien, dessen Quantität nach dem Abklären der Flüssigkeit und Ausglühen des erhaltenen Bodensatzes = 0,200 Gran gefunden wurde, so dafs also 10,000 Grane dieses Mineralwassers an im Wasser löslichen Bestandtheilen 58,50 Gran enthalten. Diese Salzlösung wurde mit *A* bezeichnet.

6. 10,000 Grane Wassers wurden mit reiner Salpetersäure etwas übersättigt, und hierauf mit salpetersaurem Silberoxyd im Übermafse versetzt. Der entstandene weifse Niederschlag wurde gesammelt, gewaschen, getrocknet, in einem Glasschälchen geschmolzen und gewogen; das Gewicht der geschmolzenen Masse betrug nach Abzug des Schälchens 63,80 Gran.

Ein anderer mit 5000 Granen Wassers angestellter Versuch lieferte nach scharfem Austrocknen, ohne jedoch geschmolzen worden zu seyn, 32,12 Gran Chlorsilbers, was für die Richtigkeit der oben gefundenen Menge spricht.

7. Da bei der Präliminäruntersuchung dieses Mineralwassers gefunden wurde, dafs es Jodine enthält, da ich ferner aus dem Vorhandenseyn dreier Salzbilder auf die Gegenwart des vierten erst neu entdeckten schlofs, da endlich auch diese beiden die Eigenschaft besitzen, mit dem Silber im Wasser unlösliche Verbindungen einzugehen: so mufs der mittelst des salpetersauren Silberoxyds aus dem Wasser erhaltene Niederschlag aufser dem Chlorsilber auch noch Jod- und Bromsilber führen.

Zur Bestimmung des Jodgehaltes wurde folgendes Verfahren befolgt.

8. 34780 Gran Wassers wurden bis auf ein Zehntel des anfänglichen Volumens verdünstet, die Flüssigkeit von den niedergefallenen Erden getrennt, mit Salpetersäure etwas übersättigt, filtrirt, und hierauf mit einer heifsen Lösung des salpetersauren Silberoxyds niedergeschlagen. Der erhaltene Niederschlag, dessen Gewicht 221,90 Gr. betrug, wurde fein gerieben, mit tropfbar-flüssigem reinen Ammoniak und Wasser gekocht, hierauf noch mit einer grofsen Menge Ammoniaks und Wassers versetzt, um selbst nach dem Abkühlen die sonst unvermeidliche und falsche Resultate verursachende Krystallisation des Doppelsalzes aus Ammonium, Silberoxyd und Hydrochlorinesäure zu verhindern, und in einer vollgefüllten wohlverschlossenen Flasche zum vollkommenen Absetzen des Jodsilbers hingestellt. Nach Verlauf von etwa fünf Wochen wurde die klare Flüssigkeit abgezogen, der Rest aufs Filtrum gegossen, mit verdünntem reinen Ammonium gewaschen, und erst zwischen Löschpapier, dann aber in der Wärme scharf ausgetrocknet. Ein zweites, demselben am Gewichte gleiches Filtrum wurde mitgetrocknet, und beim Wägen in die Gegenschale gelegt; die Differenz war 0,47 Gran, und gab die aus 34780 Gr. Wassers gebildete Menge Jodsilbers an, welches für 10,000 Grane desselben 0,136 beträgt; denn es ist

$$34780 : 10000 = 0{,}47 : x,$$

$$x \text{ ist also } = \frac{10000 \times 0{,}47}{34780} = 0{,}136.$$

9. Nun handelte es sich darum, die Existenz des Broms in dem Wasser zu erweisen, und wenn diefs geschehen ist, seine Menge wo möglich auch zu bestimmen. Ersteres geschah dadurch, dafs man durch eine

aus etwa einer Mafs Wassers gewonnene concentrirte Salzlösung reines Chlorgas leitete, und die bräunlich gewordene Flüssigkeit mit Äther vermischte, der ihr sogleich die Farbe entzog, aber durch Zusatz von etwas Kaliumoxydhydratlösung wieder entfärbt wurde. Der nach der Verdünstung des Äthers zurückgebliebene salzige Anflug gab mit Chlorwasser wieder eine bräunliche Lösung, die vom Äther wieder entfärbt wurde. Diefs liefs mich auf das Vorhandenseyn des Broms schliefsen, zu dessen Ausscheidung ich folgendes Verfahren wählte.

10. 40,000 Gr. Wassers wurden zur Trockne verdünstet, der Rückstand mit Wasser behandelt, das Flüssige von dem Unlöslichen getrennt, nochmals verdünstet und im Wasser gelöst, von dem noch in der Lösung vorhandenen kleinen Bodensatze getrennt, und hierauf mit reiner Hydrochlorinesäure gesättigt. Durch die filtrirte Flüssigkeit wurde nun ein Strom gewaschenen Chlorgases geleitet, wodurch sie sich braun färbte. Sie wurde hierauf mit Äther geschüttelt, welcher sich hierdurch braun färbte, und mittelst Baumwolle von der wässerigen Flüssigkeit getrennt wurde, die man dann noch mit einer Portion Äthers versetzte, und diesen wieder abzog. Sämmtlicher Äther wurde mit einigen Tropfen Ammoniaks versetzt, die Flüssigkeit mit reiner Salpetersäure neutralisirt, und hierauf mit salpetersaurem Silberoxyd versetzt. Der entstandene Niederschlag war ziemlich gelb, und deutlich vom reinen Chlorsilber zu unterscheiden. Da er aber aus Jodsilber und Bromsilber nebst etwas Chlorsilber, welches sein Daseyn der im Übermafse zugesetzten und vom Äther ebenfalls aufgenommenen Chlorine verdankte, bestand, und Bromsilber im Ammoniak gleich dem Chlorsilber auflöslich ist: so wurde der gewaschene Niederschlag mit verdünntem reinen Ammoniak übergossen, einige Zeit da-

mit in Berührung erhalten, die Flüssigkeit dann von dem abgesetzten Jodsilber abgegossen und mit Hydrochlorinesäure etwas übersättigt: der niedergefallene gelbliche Niederschlag bestand nun bloſs aus Brom- und Chlorsilber, und wog nach scharfem Austrocknen 1,20 Gran. Da dieses Quantum zu den nachfolgenden Versuchen verwendet worden, so konnte man das Brom nicht quantitative bestimmen; nur der Farbe des erhaltenen gemengten Niederschlages nach geschlossen, könnte das Bromsilberquantum auf $^1/_3$ des ganzen Niederschlags mit ziemlicher Sicherheit, also auf 0,40 Gran angesetzt werden.

11. Ein Theil des Gemenges aus Chlor- und Bromsilber wurde mit concentrirter Schwefelsäure übergossen, und das Gemenge erwärmt, worauf man einige röthliche Dämpfe wahrnahm.

Eine andere Portion des Niederschlages wurde mit verdünnter Hydrochlorinesäure übergossen und erwärmt; das Gemenge stieſs erstickende, zum Husten sehr stark reizende Dämpfe aus, und selbst nach dem Auskühlen nach einigen Stunden war dieser reizende Geruch sehr wahrnehmbar, während die zum Versuche angewandte verdünnte Säure bei dem Riechen nicht die mindeste Beschwerde verursachte.

Die vom vorhergehenden Versuche abgegossene Flüssigkeit mit reiner verdünnter Salpetersäure versetzt und das Ganze erhitzt, entwickelte weiſse, mit rothbraunen Streifen durchzogene Dünste.

Das im Ammoniak unaufgelöst Gebliebene wurde mit Hydrochlorinesäure übergossen, etwas erwärmt, hierauf mit Stärke und dann mit Salpetersäure versetzt; sogleich entstand eine violette Färbung der Masse, die immer intensiver wurde, und endlich recht dunkel erschien, ein Beweis, daſs das im Ammoniak unaufgelöst Gebliebene Jodsilber sey.

12. Bei 3. haben wir aus 10,000 Gr. Wassers 63,80 Gr. einer geschmolzenen Masse erhalten, welche aus Chlorsilber und etwas Brom- und Jodsilber besteht, und worin das Jodsilber (nach 5.) 0,136 Gr., das Bromsilber aber beiläufig 0,10 Gr. beträgt. 10,000 Gr. unseres Mineralwassers lieferten also:

an Chlorsilber	. 63,80 — (0,136 + 0,100) =	63,564 Gr.
» Bromsilber	. 63,80 — (63,564 + 0,136) =	0,100 Gr.
» Jodsilber	. 63,80 — (63,564 + 0,100) =	0,136 Gr.
	Zusammen .	63,800 Gr.

13. Da nun 1 stöchiometrischer Antheil Chlorsilbers (= 143,776) aus 1 stöch. Antheil Chlors und 1 stöch. Anth. Silbers besteht, so entspricht oben angeführtes Quantum desselben 15,681 Gr. Chlors; denn es ist

$$143{,}776 : 35{,}470 = 63{,}564 : x,$$

$$x \text{ ist also } = \frac{35{,}470 \times 63{,}564}{143{,}776} = 15{,}681.$$

Ferner besteht das Bromsilber ebenfalls aus 1 stöch. Antheile Broms (= 75,410) und 1 stöch. Anth. Silbers (= 108,306), wornach sich die Quantität des in 10,000 Gr. Wassers enthaltenen Broms, aus der gewiſs nicht zu hoch, wenn nicht vielmehr zu niedrig angesetzten Menge Bromsilbers berechnet, zu 0,04105 Gr. ergibt; denn es ist wieder

$$183{,}716 : 75{,}41 = 0{,}10 : x,$$

$$x \text{ also } = \frac{75{,}41 \times 0{,}10}{183{,}716} = 0{,}04105.$$

Endlich ist die Zusammensetzung des Jodsilbers den beiden Vorhergehenden entsprechend, und dem zu Folge sein stöch. Werth = 231,512, woraus sich ergibt, daſs das, der aus 10,000 Gr. erhaltenen Jodsilbermenge entsprechende, Jodquantum 0,072 Gr. sey. Es ist nämlich

$$231{,}512 : 123{,}206 = 0{,}136 : x,$$

$$x \text{ ist also } = \frac{123{,}206 \times 0{,}136}{231{,}512} = 0{,}072.$$

10,000 Gr. der Luhatschowitzer Trinkquelle enthalten also an

Chlor	15,68100 Gr.,
Brom	0,04105 Gr.,
Jod	0,07200 Gr.,

oder an

Hydrochlorsäure .	16,123100 Gr.,
Hydrobromsäure .	0,041594 Gr.,
Hydrojodsäure . .	0,072584 Gr.

14. Die bei 2. erhaltene und mit *A* bezeichnete wohlgereinigte Salzlösung wurde mit reiner Hydrochlorinesäure, unter Vermeidung alles Verspritzens, etwas übersättigt, bis zum Rückstande von etwa 1 Kubikzolle verdünstet, und mit reiner Platinchloridlösung bis zur Doppelsalzbildung versetzt; es entstand ein bedeutender Niederschlag von Chlorplatinkalium, von welchem die Flüssigkeit abgegossen und bis zum Krystallisationspuncte verdünstet wurde. Die Krystallisation wurde durch häufiges Umschütteln gestört, und die Flüssigkeit nach dem Auskühlen zur Ruhe hingestellt. Nach etwa 24 Stunden wurde die Salzmasse schnell mit Wasser behandelt, das hierbei vorgefundene Chlorplatinkalium dem erst Erhaltenen zugesetzt, alles mit Alkohol abgespület, hierauf scharf getrocknet und gewogen; sein Gewicht betrug 8,40 Gran, und deutet auf 1,36 Gran Kaliums oder auf 1,637 Gr. Kaliumoxyds.

Es ist nämlich 1 stöch. Anth. Chlorplatinkaliums = 243,07, und besteht aus 1 stöch. Anth. Kaliums (= 39,26), 1 stöch. Anth. Platins (= 97,40), und 3 stöch. Anth. Chlors (= 35,47 × 3).

Es verhält sich also:

$$243{,}07 : 39{,}26 = 8{,}40 : x,$$

x also $= \frac{39{,}26 \times 8{,}40}{243{,}07} = 1{,}360$ Gr. Kaliums, und da 1 stöch. Antheil desselben 1 stöch. Antheil Oxygens aufnimmt, um sich in Oxyd zu verwandeln, so entspricht diese Menge 1,637 Gr. Kaliumoxyds.

15. Da uns nun die Quantitäten derjenigen Salzbilder bekannt sind, welche im Wasser leicht lösliche Verbindungen mit Kalium und Sodium liefern; da wir ferner aus den Vorversuchen, mit Berücksichtigung der Verwandtschaftsäufserungen, wissen, dafs die Ersteren in der geschmolzenen Salzmasse nur an Eins oder an Beide der Letzteren gebunden seyn können; und da endlich nach 11. der Kaliumgehalt in 10,000 Gr. Wassers nur 1,360 Gr. beträgt: so sehen wir uns im Stande, die den Salzbildern entsprechende Quantität des Sodiums, und, nach Abzug der Verbindungen von dem Totalgewichte der Salzmasse, auch jene des im Wasser vorhandenen kohlenstoffsauren Sodiumoxyds bestimmen zu können. Was das Kalium betrifft, so besitzt dieses unter gewöhnlichen Umständen eine gröfsere Verwandtschaft zum Chlor als zu den übrigen zwei Salzbildern, und da wir jetzt nur diese Umstände berücksichtigen müssen: so wollen wir erst die demselben entsprechende Chlorquantität bestimmen, um dann auf die Quantität des Sodiums und jene des kohlenstoffsäuerlichen Sodiumoxyds der geschmolzenen Salzmasse sicher schliefsen zu können.

16. Das Chlorkalium besteht aus gleichen stöch. Antheilen Chlors und Kaliums, und dem zu Folge ist sein stöch. Werth $= 74{,}73$, worin also 35,47 Chlors enthalten sind; es ist aber

$$39{,}26 : 35{,}47 = 1{,}36 : x \quad \text{und}$$

$$x = \frac{35{,}47 \times 1{,}36}{39{,}26} = 1{,}2287.$$

Es verbinden sich also 1,36 Gr. Kaliums mit 1,2287 Gr. Chlors zu 2,5887 Gr. Chlorkaliums.

Nun bleiben uns noch 15,6810 — 1,2287 = 14,4523 Gr. Chlors, welche an Sodium gebunden seyn müssen; und da das Chlorsodium dem Chlorkalium analog zusammengesetzt, der stöch. Werth des Sodiums aber = 23,31 ist: so verhält sich

I. $35,47 : 23,31 = 14,4523 : x$, und

x ist $= \frac{23,31 \times 14,4523}{35,47} = 9,4695$ — dem rückständigen Chlor entsprechendes Sodium.

Ferner: das Brom- so wie auch das Jodsodium haben dieselbe Zusammensetzung, und es ist

II. $75,41 : 23,31 = 0,04105 : x$,

x ist aber $= \frac{23,31 \times 0,04105}{75,41} = 0,01269$ — dem Brom entsprechendes Sodium; und endlich

III. $123,206 : 23,31 = 0,072 : x$,

x aber $= \frac{23,31 \times 0,072}{123,206} = 0,01362$ — dem Jod entsprechendes Sodium.

17. Dem vorhergehenden Paragraphe zu Folge entsprechen:

1,36 Gr. Kaliums 1,2287 Gr. Chlors, und liefern . . :	2,58870 Gr. Chlorkaliums.
14,4523 Gr. Chlors 9,4695 Gr. Sodiums, und liefern :	23,92180 Gr. Chlorsodiums.
0,04105 Gr. Broms 0,01269 Gr. Sodiums, und liefern :	0,05374 Gr. Bromsodiums.
0,07200 Gr. Jods 0,01362 Gr. Sodiums, und liefern . . :	0,08562 Gr. Jodsodiums.
Zusammen :	26,64986 Gran.

Werden nun diese 26,64986 Gr. von der aus 10,000 Gr. Wassers erhaltenen geschmolzenen Salzmasse abgezogen, so zeigt der Rest die Menge des kohlenstoffsäuer-

lichen Sodiumoxyds an, aus dem sich dann die Quantität des im Wasser gelöst erhaltenen kohlenstoffsauren Salzes genau bestimmen läſst. Nun betrug der reine Salzgehalt von 10,000 Gr. Wassers . . 58,50000 Gr., und das Gesammtgewicht der Chloride,

Bromide und Jodide ist . . . . . = 26,64986 Gr.,

folglich bleibt an kohlenstoffsäuerlichem

Natriumoxyd . . . . 31,85014 Gr.,

welche Menge 18,6606 Gr. reinen Natriumoxyds entspricht. Denn es ist: $\frac{62,62 \times 31,85}{106,87} = 18,6606.$

18. Den Vorversuchen zu Folge ist in diesem Mineralwasser auch Hydrofluorinesäure enthalten, und ich unterlieſs es nicht, auch diese quantitativ zu bestimmen. Zu diesem Ende wurden 100,000 Gr. des Mineralwassers langsam verdünstet, der gut ausgewaschene erdige Niederschlag in einem Platintiegel in verdünnter Hydrochlorinesäure aufgelöst, die Auflösung filtrirt, und mit reinem Ammoniak in gut verschlossenen Gefäſsen niedergeschlagen. Der erhaltene gut ausgewaschene Niederschlag wurde nun im Platintiegel mit Schwefelsäurehydrat übergossen, das Ganze bis zur gänzlichen Verflüchtigung der Hydrofluorinesäure erhitzt, hierauf in vielem Wasser gelöst, das Eisenoxyd durch reines Ammoniak entfernt, und die filtrirte Flüssigkeit mit oxalsaurem Ammoniak versetzt, worauf sich ein Niederschlag bildete, welcher nach dem Trocknen und Ausglühen 0,75 Gr. kohlenstoffsäuerlichen Calciumoxyds lieferte, welche Menge 0,2776 Gr. Fluors entspricht. Es ist nämlich

$101,25 : 37,47 = 0,75 : x$ und $x = \frac{37,47 \times 0,75}{101,25} = 0,27756.$

10,000 Gewichtstheile des Wassers enthalten also

$\frac{0,2776}{10} = 0,02776$ Gr. Fluors in ihrer Grundmischung.

(Der Beschluſs folgt.)

III.

Über die Gestalt der Bruchstücke zerschossener Glastafeln;

von

August Neumann.

Ich machte vor Kurzem den Versuch, ein Bret mittelst einer Unschlittkerze zu durchschiefsen. Diefs brachte mich auf den Gedanken, auch eine Glasscheibe mittelst einer abgeschossenen Kugel zu durchbohren. Dafs solches schon früher sowohl durch Kanonen als auch durch andere Schiefsgewehre sey bewerkstelliget worden, ist bekannt; es befindet sich selbst in dem physikalischen Museum der hiesigen Universität eine mittelst einer Granate durchschossene Scheibe, bei welcher das Glas übrigens ganz unverletzt ist. Ich bediente mich bei meinen Versuchen einer Jagdflinte, und hing die Glasscheiben in einem einfachen Netze aus Bindfäden an einem Baume auf. Die Scheiben, welche ich zu den ersten Versuchen nahm, hatten eine Länge von etwa 10″, und eine Breite von beiläufig 8″. Diese wurden jedes Mal blofs in Trümmer geschossen, obgleich ich die Pulverladung immer vermehrt hatte. Später nahm ich Scheiben von beiläufig 18″ Länge und 16″ Breite, und es glückte mir, ein Loch von der Gröfse der abgeschossenen Kugel mit einem etwas matten Rande zu erhalten.

Wenn aber der beabsichtigte Versuch auch mehrmals mifslungen ist, so war er doch nicht ohne Ausbeute. Denn als ich meine Aufmerksamkeit auf die zu Boden gefallenen Trümmer richtete: fand ich sie ganz anders gebildet, als die Trümmer eines durch Druck oder Schlag gebrochenen Glases; am meisten waren sie noch denen ähnlich, die man erhält, wenn erhitztes

Glas schnell abgekühlt wird. Die strahlige Figur, und die sanft gekrümmten Linien, die gewöhnlich beim zerbrochenen Glase entstehen, finden hier ganz und gar nicht Statt. Die Bruchkanten hatten immer bauchförmige Ein- und Ausbiegungen (Fig. 9, 10, 11) *), welche Krümmungen selbst wieder nicht glatt, sondern mehr zackig waren, und wieder aus ganz kleinen Einbiegungen bestanden, ähnlich den gröſseren. Die Bruchfläche selbst ist ferner nicht, wie beim gewöhnlichen Zerspringen des Glases, senkrecht (oder wenig von dieser Lage abweichend) auf die Fläche der Scheibe, sondern (wie Fig. 10) von den verschiedensten Neigungen, die nicht allmählich in einander übergehen, sondern eine Art von Winkelstufen bilden, die gleichfalls verschiedene Neigungen gegen einander haben, so zwar, daſs die nicht glatten Bruchflächen mit einer groben, schlecht verfertigten Feile verglichen werden könnten, wenn nämlich der Meiſsel beim Hauen derselben unter verschiedenen Winkeln gehalten würde, und zugleich Schläge von ungleicher Stärke erhielte; daher denn die Einschnitte nicht überall gleiche Tiefe haben, und die Furchen nicht unter einander parallel seyn könnten. Dieſs ist übrigens nur eine beiläufige Beschreibung eines solchen Bruchstückes, dessen Form ganz eigenthümlich ist, und eine genaue Beschreibung kaum zuläſst.

Ich glaubte aber auf diese Form der Trümmer aufmerksam machen zu sollen, indem es gewiſs eine sonderbare Erscheinung ist, daſs ein und eben derselbe Körper so sehr von einander verschiedene Formen beim Zerbrechen zeigt, da doch, in Beziehung auf die Ursache des Zerbrechens, der Unterschied bloſs in der verschiedenen Geschwindigkeit des Schlages besteht.

---

*) Fig. 10 ist eine perspectivische Ansicht.

IV.

Über die terrestrischen Oculare;

von

I. I. Littrow.

Zur vollständigen Behandlung der Fernröhre ist, nebst der bereits gegebenen Bestimmung des Objectivs und des astronomischen Oculars mit zwei Linsen, noch die des sogenannten terrestrischen Oculars übrig, welches letzte gewöhnlich aus vier Linsen besteht, und eine eigene Untersuchung erfordert. Da aber hier die Anzahl der Brennweiten, der Distanzen, der conjugirten Vereinigungsweiten u. d. gl. zu groſs wird, um für jede einzelne Bestimmung auf die ursprünglichen Formeln der Dioptrik zurückzugehen, so ist eine *allgemeine Methode* nothwendig, Probleme dieser Art bequemer aufzulösen, als es wohl früher von *Klügel*, *Langsdorf* und anderen optischen Schriftstellern geschehen seyn mag.

Es seyen p die Brennweite, a und α die beiden conjungirten Vereinigungsweiten, und $z = p\omega$ der Öffnungshalbmesser der ersten Linse oder des Objectivs. Für die zweite, dritte . . Linse wollen wir dieselben Grössen durch $p' \, a' \, \alpha' \ldots$ und $p'' \, a'' \, \alpha'' \ldots$ bezeichnen, und der Kürze wegen annehmen

$$A = \frac{a'}{\alpha'}, \quad A' = \frac{a''}{\alpha''}, \quad A'' = \frac{a'''}{\alpha'''} \ldots \text{ und}$$

$$B = \frac{\alpha}{a'}, \quad B' = \frac{\alpha'}{a''}, \quad B'' = \frac{\alpha''}{a'''} \text{ u. s. w.}$$

Nennt man m die Vergröſserung des Fernrohres, so hat man für n Linsen

$$\left.\begin{array}{l} m = B \,.\, B' \,.\, B'' \,.\, B''' \ldots B^{n-2} \quad \text{und} \\ 0 = \omega' + \dfrac{\omega''}{B'} + \dfrac{\omega'''}{B'B''} + \dfrac{\omega''''}{B'B''B'''} \ldots + \dfrac{\omega^{n-1}}{B'B''B'''\ldots B^{n-2}} \end{array}\right\} \ldots \text{(I.)},$$

wo die letzte Gleichung bekanntlich die Bedingung ausdrückt, daſs die Gegenstände durch das Fernrohr mit einem farbenlosen Rande erscheinen.

Diese zwei Gleichungen bestimmen also zwei der Gröſsen B, B', B'' . . ., wenn die übrigen, so wie die Öffnungsfactoren ω', ω'', ω''' . . . entweder gegeben, oder willkürlich angenommen werden, da unser Problem, wegen der gröſseren Anzahl von unbestimmten Gröſsen, selbst zu den unbestimmten Aufgaben gehört.

Für das halbe Gesichtsfeld φ des Fernrohres hat man

$$\varphi = \frac{\omega^{n-1} - \omega^{n-2} + \omega^{n-3} - \omega^{n-4} \ldots \mp \omega'' \pm \omega'}{m \pm 1};$$

das obere Zeichen, wenn n gerade, und das untere, wenn n ungerade ist.

Kennt man auf diese Art die Gröſsen B, ω und φ, so findet man die Gröſsen A, A', A'' . . . durch folgende Gleichungen, deren Beweise aus den ersten Gründen der Optik ich hier übergehen kann:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{A\omega'}{A+1} &= (B+1)\varphi \\
\frac{A'\omega''}{A'+1} &= (BB'-1)\varphi + \omega' \\
\frac{A''\omega'''}{A''+1} &= (BB'B''+1)\varphi + \omega'' - \omega' \\
\frac{A'''\omega''''}{A'''+1} &= (BB'B''B'''-1)\varphi + \omega''' - \omega'' + \omega' \text{ etc.}
\end{aligned}\right\} \ldots \text{(II.)}$$

Man wird dabei bemerken, daſs das erste a und das letzte a immer unendlich ist, weil die Strahlen bei jedem Fernrohre parallel auf die erste Linse fallen, und eben so parallel wieder aus der letzten Linse austreten sollen, woraus zugleich folgt, daſs das erste $a = p$ und das letzte a, oder $a^{n-1} = p^{n-1}$, also auch das letzte A, oder $A^{n-2} = \infty$ ist, so daſs z. B. für $n = 5$ die letzte der Gleichungen (II.) in folgende übergeht:

$$\omega'''' = (m - 1)\varphi + \omega''' - \omega'' + \omega',$$

welche mit dem oben für φ gegebenen Ausdrucke identisch ist:

Kennt man also auch mittelst der Gleichungen (II.) die Gröſsen A, A', A'' . . ., so hat die eigentliche Bestimmung des Fernrohres oder des gesuchten Oculares keine weitere Schwierigkeit. Diese Bestimmung besteht nämlich in der Angabe der Brennweiten $p' p'' p'''$ . . . der Linsen, und ihrer Distanzen $\Delta = \alpha + a'$, $\Delta' = \alpha' + a''$, $\Delta'' = \alpha'' + a'''$ u. s. w., und man findet diese Gröſsen durch folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{llll} p' = \dfrac{A\alpha}{(1+A)B} & \text{und } \Delta & = \dfrac{(1+B)\alpha}{B} \\ p'' = \dfrac{AA'\alpha}{(1+A')BB'} & \text{»} \quad \Delta' & = \dfrac{(1+B')A\alpha}{BB} \\ p''' = \dfrac{AA'A''\alpha}{(1+A'')BB'B''} & \text{»} \quad \Delta'' & = \dfrac{(1+B'')AA'\alpha}{BB\,B''} \\ p'''' = \dfrac{AA'A''A'''\alpha}{(1+A''')BB\,B'B'''} & \text{»} \quad \Delta''' & = \dfrac{(1+B''')AA'A''\alpha}{BB'B'B'''} \\ \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots \text{(III.)}$$

Will man endlich noch die Vereinigungsweiten a', α'; a'', α'' . . . kennen, so erhält man sie durch folgende einfache Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{llll} a' = \dfrac{\alpha}{B} & \text{und} \quad \alpha' & = \dfrac{A\alpha}{B} \\ a'' = \dfrac{A\alpha}{BB'} & \text{»} \quad \alpha'' & = \dfrac{AA'\alpha}{BB'} \\ a''' = \dfrac{AA'\alpha}{BB'B''} & \text{»} \quad \alpha''' & = \dfrac{AA'A''\alpha}{BB'B'} \\ a'''' = \dfrac{AA'A''\alpha}{BB'B''B'''} & \text{»} \quad \alpha'''' & = \dfrac{AA'A''A'''\alpha}{BB'B''B''} \\ \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots \text{(IV.)}$$

wodurch also das Fernrohr in allen seinen Theilen vollständig bestimmt ist.

Es wird kaum nöthig seyn, zu erinnern, daſs die Aus-

drücke der Distanzen Δ, Δ', Δ'' . . . der Linsen, ihrer Natur nach, immer positive Gröſsen seyn müssen, welchem gemäſs also die Wahl der Gröſsen B, B', B'' . . . vorgenommen werden soll. Ist ferner B, B' oder B'' . . . negativ, so wird dadurch angezeigt, daſs kein reelles Bild zwischen die Linsen I., II. oder II., III. oder III., IV. fällt u. f. Ferner ist bekannt, daſs das Auge, um das ganze Gesichtsfeld zu übersehen, bei einem Systeme von n Gläsern in der Entfernung

$$\frac{a^{n-1} \cdot \omega^{n-1}}{\alpha A A' A'' \ldots A^{n-3} \varphi}$$

hinter der letzten Linse stehen soll, und daſs daher dieser Ausdruck selbst positiv seyn muſs. Da endlich die Öffnungshalbmesser der Linsen wegen dem Gesichtsfelde immer gröſser seyn müssen, als die Öffnungshalbmesser wegen der Helligkeit, so hat man

$$\omega' > \frac{z}{B p'}, \quad \omega'' > \frac{z}{A' B B' p''}, \quad \omega''' > \frac{z}{A'' B B' B'' p'''}, \text{ etc.}$$

wo z den Öffnungshalbmesser des Objectivs bezeichnet: alles bekannte Bedingungen, welchen die Einrichtung eines jeden Fernrohrs unterliegt, und bei denen ich mich daher nicht weiter aufhalte.

* * *

Geht man nun zu der Anwendung der vorhergehenden allgemeinen Auflösung unseres Problemes, zu einigen speciellen Fällen über, und betrachtet man unter diesen zuerst die Fernröhre mit drei Linsen, so sey des gröſseren Gesichtsfeldes wegen $\omega'' = -\omega'$. Nimmt man auf den farbigen Rand keine Rücksicht, so hat man bloſs die beiden ersten der Gleichungen (I.) und (II.), oder

$$m = B B' \quad \text{und} \quad \frac{A}{A+1} = -\frac{2(B+1)}{m-1}.$$

Läſst man also B unbestimmt, so ist

$$B' = \frac{m}{B} \quad \text{und} \quad A = -\frac{2(B+1)}{m+2B+1},$$

also geben die Gleichungen (III.)

$$p' = -\frac{2(B+1)\alpha}{(m-1)B}, \qquad \Delta = \frac{(B+1)\alpha}{B},$$

$$p'' = -\frac{2(B+1)\alpha}{m(m+2B+1)}, \quad \Delta' = -\frac{2(B+m)(B+1)\alpha}{mB(m+2B+1)}.$$

Ist B negativ, so fällt das einzige wahre Bild des Fernrohrs zwischen II. und III., und die Gleichung $\Delta = \left(\frac{1}{B}+1\right)\alpha$ zeigt, daſs das negative B zwischen die Grenzen 1 und α fallen muſs, und daſs der für die Ausübung vortheilhafteste Werth von $B = m$ ist.

Ist aber B positiv, so fällt das wahre Bild zwischen I. und II., und die letzten Gleichungen selbst zeigen, daſs $B > m$ seyn muſs.

Nimmt man aber auch auf den farbigen Rand Rücksicht, so geben die Gleichungen (I.) und (II.)

$$m = BB', \quad \frac{A}{A+1} = -\frac{2(B+1)}{m-1} \quad \text{und} \quad B' = 1,$$

woraus folgt $B = m$ und $A = -\frac{2(m+1)}{3m+1}$, und daher nach den Gleichungen (III.)

$$p' = -\frac{2(m+1)\alpha}{m(m-1)}, \quad \Delta = \frac{(m+1)\alpha}{m},$$

$$p'' = -\frac{2(m+1)\alpha}{m(3m+1)}, \quad \Delta' = -\frac{4(m+1)\alpha}{m(3m+1)},$$

so daſs hier nur *eine* Bestimmung für jeden Werth von m Statt hat, während vorhin die Werthe von p', p'', Δ und Δ'' durch die willkürliche Annahme des Werthes von B noch mannigfaltig abgeändert werden können. Da endlich hier $B' = +1$ ist, so fällt das wahre Bild nie zwischen I. und II., was alles mit den Resultaten meines

vorhergehenden Aufsatzes über die astronomischen Oculare mit zwei Linsen vollkommen übereinstimmt, daher ich hier nicht weiter dabei verweile.

* *
*

Gehen wir zu den Ocularen mit vier Linsen über, und nehmen wir an $\omega' = \theta\,\omega$, $\omega'' = \omega$ und $\omega''' = -\omega$, so ist $\varphi = \frac{(\theta - 2)\,\omega}{m + 1}$. Dieses vorausgesetzt, geben die Gleichungen (I.):

$$m = B\,B'\,B'' \quad \text{und} \quad 0 = B'\,B''\,\theta + B'' - 1.$$

Läſst man also die Gröſse B' unbestimmt, so ist

$$B'' = \frac{1}{B'\,\theta + 1} \quad \text{und} \quad B = \frac{m\,(B'\,\theta + 1)}{B'},$$

und mit diesen Werthen von B und B'' geben die Gleichungen (II.):

$$A = \frac{(B'\,m\,\theta + B' + m)\,(\theta - 2)}{B'\,m\,\theta\,(3 - \theta) - m\,(\theta - 2) + 2\,B'} \quad \text{und}$$

$$A' = \frac{(B'\,m\,\theta + m - 1)\,(\theta - 2) + \theta\,(m + 1)}{(m + 1)\,(1 - \theta) - (B'\,m\,\theta + m - 1)\,(\theta - 2)}.$$

Substituirt man die gefundenen Werthe von A und B in den Gleichungen (III.), so erhält man die gesuchten Ausdrücke von p', p'', p''' und Δ, Δ', Δ'' für die Bestimmung des Oculars mit drei Linsen, und in diesen Ausdrücken wird man die Werthe der beiden unbestimmten Gröſsen θ und B, unter den oben angezeigten Beschränkungen, nach Willkür annehmen können, so daſs die Auflösung unserer Aufgabe eine in doppelter Beziehung unendliche Anzahl von Bestimmungen zuläſst.

Sucht man z. B. das gröſstmögliche Gesichtsfeld zu erhalten, so wird man $\theta = -1$ setzen, wodurch $\varphi = \frac{3\,\omega}{m+1}$ wird, und damit geben die Gleichungen (III.) für die Construction des Rohres folgende Ausdrücke:

$$p' = \frac{3(m - mB' + B')\alpha}{m(m+1)(1-B')} \text{ und } \Delta = \frac{(m - mB' + B')\alpha}{m(1-B')},$$

$$p'' = \frac{(3mB' + 2 - 4m)p'}{4mB' - 2B' - 3m} \text{ » } \Delta' = \frac{3(1+B')\Delta}{4mB' - 2B' - 3m},$$

$$p''' = \frac{(m+1)(1-B')p''}{5m - 3mB' - 1} \text{ » } \Delta'' = \frac{(2-B')(3mB' + 2 - 4m)\Delta'}{(1+B')(5m - 3mB' - 1)}.$$

Soll B' positiv seyn, so zeigen diese Gleichungen, daſs man $B' > 2$ annehmen muſs, und dann ist B und B'' negativ, oder das einzige wahre Bild des Fernrohres fällt zwischen die II[te] und III[te] Linse. Nimmt man z. B. für einen besonderen Fall $B = \frac{5}{2}$, so ist $B'' = -\frac{2}{3}$ und $B = -\frac{3m}{5}$, und die letzten Gleichungen geben für die Construction des gesuchten Oculars:

$$p' = \frac{(3m-5)\alpha}{m(m+1)}, \qquad \Delta = \frac{(3m-5)\alpha}{3m},$$

$$p'' = \frac{(3m-5)(7m+4)\alpha}{2m(m+1)(7m-5)}, \qquad \Delta' = \frac{7(3m-5)\alpha}{2m(7m-5)},$$

$$p''' = \frac{3(3m-5)(7m+4)\alpha}{2m(7m-5)(5m+2)}, \quad \Delta'' = \frac{(3m-5)(7m+4)\alpha}{2m(7m-5)(5m+2)}.$$

So hat man für das specielle Exempel $\theta = -1$, $B' = \frac{5}{2}$, $m = 60$, $\alpha = 56.9$ und $\omega = \frac{1}{4}$

$$p' = 2.72, \quad \Delta = 55.32,$$
$$p'' = 1.39, \quad \Delta' = 1.40,$$
$$p''' = 0.84, \quad \Delta'' = 0.28,$$

und überdieſs nach den Gleichungen (IV.)

$$a' = -1.58,$$
$$\alpha' = 1.00,$$
$$a'' = 0.40,$$
$$\alpha'' = -0.56 \quad \text{und} \quad \varphi = 42.3 \text{ Minuten.}$$

Das Vorhergehende zeigt hinlänglich das Verfahren, welches man bei der Bestimmung eines jeden Oculars von drei oder vier Linsen zu beobachten hat, ein Verfahren, das nach der zu einem gegebenen Zwecke ange-

nommenen Wahl der Constanten des Problemes in blossen einfachen Substitutionen besteht, und daher keiner weiteren Erläuterung bedarf.

* * *

Wir gehen nun zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Untersuchungen, zu den sogenannten *terrestrischen Ocularen von vier Linsen* über.

Nehmen wir zuerst an, daſs die zwei wahren Bilder des Fernrohrs von fünf Linsen zwischen II., III. und III., IV. fallen, oder daſs B' und B'' positiv, B und B''' aber negativ sind. Um ein groſses Gesichtsfeld zu erhalten, sey $\omega' = \frac{2\omega}{\sqrt{m}}$, $\omega'' = 0$ und $\omega''' = -\omega$, so wie $\omega'''' = +\omega$, so hat man

$$\varphi = \frac{2\omega}{m + \sqrt{m}}.$$

Dieses vorausgesetzt, geben die Gleichungen (I.), und die zweite der Gleichungen (II.)

$$m = B B' B'' B''',$$

$$0 = \frac{2}{\sqrt{m}} - \frac{1}{B' B''} + \frac{1}{B' B'' B'''},$$

$$0 = \frac{(B B' - 1)}{m + \sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \text{woraus folgt}$$

$B B' = -\sqrt{m}$, $B'' B''' = -\sqrt{m}$ und $(2B' - 1) B'' = \sqrt{m}$.

Da $B''' = \frac{\alpha'''}{\alpha^{\text{IV}}}$ negativ seyn soll, so ist auch α''' negativ, und da $\Delta''' = \alpha''' + \alpha''''$ immer positiv seyn muſs, so ist $\alpha'''' > \alpha'''$, oder es ist $B''' < 1$, und daher, wie die letzten Gleichungen zeigen, $B'' > \sqrt{m}$ und $B' < 1$. Da ferner B'' positiv ist, so zeigt die Gleichung

$$(2B' - 1) B'' = \sqrt{m},$$

daſs $B' > \frac{1}{2}$ ist. Es fällt also B' zwischen die engen Grenzen $\frac{1}{2}$ und 1, und da $B = -\frac{\sqrt{m}}{B'}$ war, so fällt auch B zwischen die Grenzen $\sqrt{m}$ und $2\sqrt{m}$.

Nimmt man also für B das arithmetische Mittel der beiden letzten Werthe, oder ist $B = -\frac{1}{3}\sqrt{m}$, so erhält man $B' = \frac{2}{3}$, $B'' = 3\sqrt{m}$ und $B''' = -\frac{1}{3}$. Damit geben die Gleichungen (II.)

$$A = \frac{2 - 3\sqrt{m}}{5\sqrt{m}} \quad \text{und} \quad A'' = -\frac{2(1 + 3\sqrt{m})}{1 + 5\sqrt{m}},$$

wo die Gröſse A' unserer freien Bestimmung überlassen bleibt, da $\omega'' = 0$ ist.

Substituirt man diese Werthe von A und B in den Gleichungen (III.), und setzt man der Kürze wegen

$$P = 3\sqrt{m} - 2 \quad \text{und} \quad R = 3\sqrt{m} + 1,$$
$$Q = \sqrt{m} + 1 \quad \text{»} \quad S = 5\sqrt{m} + 1,$$

so erhält man für die gesuchte Bestimmung des Oculars die Ausdrücke:

$$p' = \frac{P.a}{3Q\sqrt{m}} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{P.a}{3\sqrt{m}},$$

$$p'' = \frac{PA'.a}{5m(1 + A')} \quad \text{»} \quad \Delta' = \frac{P.a}{3m},$$

$$p''' = \frac{2PRA'.a}{15Qm\sqrt{m}} \quad \text{»} \quad \Delta'' = \frac{PRA'.a}{15m\sqrt{m}},$$

$$p'''' = \frac{2PRA'.a}{5Sm\sqrt{m}} \quad \text{»} \quad \Delta''' = \frac{4PRA'.a}{15Sm\sqrt{m}}.$$

Für das halbe Gesichtsfeld hat man $\varphi = \frac{1719}{m + \sqrt{m}}$ Minuten, wenn $\omega = \frac{1}{4}$ ist; für den Ort des Auges aber hinter der fünften Linse $K = \frac{PQR.A'a}{5m^2S}$. Die willkürliche Gröſse A' kann so bestimmt werden, daſs z. B. $p'''' = 1$ Zoll ist. Der Öffnungshalbmesser wegen dem Gesichtsfelde und wegen der Helligkeit wird für jede Linse auf die bekannte Art bestimmt. Die oben gefundenen Ausdrücke sind übrigens identisch mit jenen, welche *Klügel* auf einem anderen weniger einfachen Wege findet.

Nehmen wir zweitens an, daſs die zwei wahren Bilder zwischen die Linsen I., II. und IV., V. fallen; eine Voraussetzung, die weder in *Klügel*, noch in den zahlreichen optischen Schriften *Euler's* u. a. gefunden wird, nach welcher aber wohl die Oculare *Fraunhofer's* gebaut sind. Dieser Annahme gemäſs ist also B und B''' positiv, B' und B'' aber negativ, und wenn a'', a''' positiv und a', a'' negativ ist, so muſs $B' < 1$ so wie $B'' < 1$ seyn. Ist ferner, wie zuvor, $\omega' = \omega'''' = \frac{1}{4}$, $\omega''' = -\frac{1}{4}$ und $\omega'' = 0$, so geben die Gleichungen (I.), und die zweite der Gleichungen (II.)

$$\left.\begin{array}{c} m = B B' B'' B''' \\ B B' = 2 - m \\ B''' (1 - B' B'') = 1 \end{array}\right\},$$

woraus man durch Elimination von B' und B'' erhält

$$1 + \frac{m}{B} = -\frac{m}{(m-2) B''}.$$

Da aber das negative $B'' < 1$ ist, so ist auch, wie die letzte Gleichung zeigt:

$$B < \frac{m(m-2)}{2}.$$

Ferner gibt die zweite jener Gleichungen

$$-B' = \frac{m-2}{B},$$

und da $B < \frac{1}{2} m (m-2)$ ist, so ist auch $-B' > \frac{2}{m}$, so daſs also das negative B' zwischen die Grenzen 1 und $\frac{2}{m}$ fallen muſs. Setzt man also $-B' = \frac{\theta}{m}$, wo θ zwischen 2 und m liegen wird, so erhält man mittelst der vorhergehenden Gleichungen

$$B = \frac{m(m-2)}{\theta}, \quad B' = -\frac{\theta}{m},$$

$$B'' = -\frac{m}{m+\theta-2} \quad \text{und} \quad B''' = \frac{m+\theta-2}{m-2}.$$

Mit diesen Werthen von B geben aber die Gleichungen (II.)

$$\frac{A}{A+1} = \frac{m(m-2)+\theta}{(m-1)\theta} \quad \text{und}$$

$$\frac{A''}{A''+1} = \frac{m(\theta-2)+4-2\theta}{(m-1)(m+\theta-2)}.$$

Substituirt man endlich die gefundenen Werthe von A, B . . . in den Gleichungen (III.), so erhält man für die gesuchte Construction des Oculars die Ausdrücke:

$$p' = \frac{Pa}{m(m-1)(m-2)} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{Pa}{m(m-2)},$$

$$p'' = -\frac{A'}{A'+1} \cdot \frac{Pa}{(m-2)Q} \quad \text{»} \quad \Delta' = \frac{Pa}{m(m-2)^2},$$

$$p''' = \frac{A'(\theta-2) \cdot Pa}{m(m-1)Q} \quad \text{»} \quad \Delta'' = \frac{A'(\theta-2) \cdot Pa}{m(m-2)Q},$$

$$p'''' = \frac{A'(\theta-2)(m-2) \cdot Pa}{QRm} \quad \text{»} \quad \Delta''' = \frac{A'(\theta-2)(2m-4+\theta)\,Pa}{QRm},$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$P = m(m-2)+\theta,$$
$$Q = m(\theta-m+2)-2\theta,$$
$$R = (m+1)(m-2)+\theta.$$

Diese Ausdrücke geben daher wieder eine in doppelter Beziehung unendliche Anzahl von Auflösungen, da in ihnen die zwei Gröſsen θ und A' im Allgemeinen nach Willkür angenommen werden können. Die positive Gröſse θ muſs aber, dem Vorhergehenden gemäſs, zwischen den Grenzen 2 und m genommen werden, daher auch P und R positiv, Q aber negativ ist, wenn $\theta < m-2$ genommen wird, woraus zugleich folgt, daſs die negative Gröſse $A' > 1$ seyn muſs, damit die Werthe von Δ, Δ', Δ'' und Δ''' immer positiv werden, wie sie es ihrer Bedeutung nach seyn müssen.

Ist z. B. für einen besonderen Fall $\theta = 3$, $m = 60$ und $a = 60$ Zoll, so hat man $P = 3483$, $Q = -3306$

und $R = 3541$, also auch

$$p' = 1.0178, \qquad \Delta = 60.0517,$$
$$p'' = \frac{A'}{A'+1} \,.\, 1.0899, \qquad \Delta' = 1.0354,$$
$$p''' = -A' \,.\, 0.0179, \qquad \Delta'' = -A' \,.\, 0.0182,$$
$$p'''' = -A' \,.\, 0.0174, \qquad \Delta''' = -A' \,.\, 0.0354.$$

Für das specielle Beispiel $A' = -2$ endlich ist

$$p' = 1.018, \quad \Delta = 60.052,$$
$$p'' = 2.180, \quad \Delta' = 1.035,$$
$$p''' = 0.036, \quad \Delta'' = 0.036,$$
$$p'''' = 0.035, \quad \Delta''' = 0.071.$$

Andere Werthe von θ und A' werden verschiedene zur Ausführung geeignete Einrichtungen dieses terrestrischen Oculares geben, von denen allen das halbe Gesichtsfeld $\varphi = \frac{859}{m-1}$ Minuten, und die Entfernung des Auges von der letzten Linse $K = \frac{A\,A'\,A''}{m}$ ist.

* * *

Allein die von *Fraunhofer* construirten Oculare von vier Linsen lassen sich durch die vorhergehenden Ausdrücke nicht darstellen. Um die analytischen Ausdrücke für diese letzten zu finden, wollen wir die genauen Abmessungen derselben zu Grunde legen, welche Hr. Regierungsrath *Prechtl* in seiner Dioptrik *) mitgetheilt hat. Man bemerkt ohne Mühe, daſs die acht von ihm gemessenen Oculare im Allgemeinen zu zwei verschiedenen Classen gehören, und daſs unter ihnen die folgenden Nro. II. Seite 210, Nro. III. Seite 211, Nro. IV. Seite 212, Nro. V. Seite 214, und Nro. VI. Seite 216, die beinahe durchaus die stärkeren Vergröſserungen ent-

*) Practische Dioptrik etc., von *J. J. Prechtl.* Wien 1828.

halten, nach einer und derselben Theorie construirt worden sind. Diese fünf erwähnten Oculare sind, mit den nöthigen Verbesserungen der Brennweiten der Objective, folgende:

m	$\frac{\alpha}{p}$	p'	p''	p'''	p''''	Δ'	Δ''	Δ'''	$\frac{p'}{p''}$	$\frac{p'}{p'''}$	$\frac{p'}{p''''}$	$\frac{\Delta'}{\Delta''}$	$\frac{\Delta'}{\Delta'''}$
70	44.43	1.22	1.49	1.70	0.94	1.81	2.79	1.43	0.82	0.71	1.30	0.65	1.26
66	58.61	1.71	2.09	2.38	1.31	2.55	3.92	2.01	0.82	0.72	1.30	0.65	1.26
60	56.56	1.82	2.23	2.55	1.40	2.72	4.19	2.15	0.82	0.71	1.30	0.65	1.26
42	31.15	1.45	1.78	2.02	1.11	2.16	3.32	1.71	0.82	0.71	1.30	0.65	1.26
26	20.22	1.56	1.91	2.18	1.20	2.33	3.58	1.84	0.82	0.71	1.30	0.65	1.26

Da für alle terrestrischen Oculare *Fraunhofer's* die zwei wahren Bilder zwischen die Linsen I., II. und IV., V. fallen, so müssen für sie die beiden Gröſsen B' und B'' negativ seyn. Sucht man aber diese Werthe von B' und B'' für die fünf Fälle der vorhergehenden Tafel, so findet man, daſs sie für alle eben so constant sind, wie die angeführten Verhältnisse der Brennweiten und der Distanzen der Linsen, und daſs man für diese Fernröhre hat $B' = -\frac{3}{10}$ und $B'' = -5$. Sucht man endlich aus den durch die Tafel gegebenen Elementen nach der bekannten Methode die Öffnungscoefficienten, so erhält man eben so übereinstimmend für alle fünf Fälle $\omega' = \frac{1}{10}\omega$, $\omega'' = \frac{3}{10}$, $\omega''' = -\omega$ und $\omega'''' = +\omega$.

Diese Öffnungsfactoren und die zwei Größen B', B'' werden hinreichen, die Theorie der *Fraunhofer*'schen Oculare dieser Art zu entwickeln.

Zuerst geben die Gleichungen (I.)

$$\left.\begin{array}{l} m = B\,B'\,B''\,B''' \quad \text{und} \\ 0 = \omega' + \dfrac{\omega''}{B'} + \dfrac{\omega'''}{B'\,B''} + \dfrac{\omega''''}{B'\,B''\,B'''} \end{array}\right\},$$

von welchen die zweite die Bedingung des farbenlosen Randes enthält. Substituirt man in ihr die gefundenen Werthe von ω' und B' B'', so erhält man

$$B''' = \frac{10}{10 - 8\,B'\,B'' - 3\,B''},$$

und da es bekanntlich hinreichend ist, wenn man der Bedingung des farbenlosen Randes nur sehr nahe genug thut, so kann man $B''' = \frac{1}{2}$ annehmen, wodurch die letzte Gleichung mit einer hier mehr als hinlänglichen Genauigkeit dargestellt wird. Substituirt man dann die erhaltenen Werthe von $B' = -\frac{1}{10}$, $B'' = -5$ und $B''' = \frac{1}{2}$ in der ersten der vorhergehenden Gleichungen, oder in $m = B\,B'\,B''\,B'''$, so erhält man $B = \dfrac{4m}{3}$.

Geht man jetzt zu den Gleichungen (II.) über, so hat man, wenn man die gefundenen Werthe von ω und B substituirt, da nach dem Vorhergehenden

$$\varphi = \frac{\omega'''' - \omega''' + \omega'' - \omega'}{m-1} = \frac{15\,\omega}{10\,(m-1)} \quad \text{ist:}$$

$$\frac{A}{A+1} = \frac{5\,(4m+3)}{8\,(m-1)}, \quad \text{also auch} \quad A = -\frac{5\,(4m+3)}{12\,m+23}.$$

$$\frac{A'}{A'+1} = \frac{2\,m-23}{3(m-1)}, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad A' = \frac{2\,m-23}{m+20}.$$

$$\frac{A''}{A''+1} = -\frac{(5m+4)}{2\,(m-1)} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad A'' = -\frac{(5m+4)}{7m+2}.$$

Substituirt man endlich die erhaltenen Ausdrücke von A, B . . . in den Gleichungen (III.), so findet man

für die Construction der gegebenen Oculare *Fraunhofer's* folgende Gleichungen:

$$p' = \frac{15\,(4m+3)\,\alpha}{32\,m\,(m-1)} \quad \text{und} \quad \Delta = \frac{(4m+3)\,\alpha}{4\,m},$$

$$p'' = \frac{80\,(2m-23)\,p'}{9\,(12m+23)} \quad \text{»} \quad \Delta' = \frac{35\,\Delta}{12\,m+23},$$

$$p''' = \frac{3\,(5m+4)\,p''}{10\,(m+20)} \quad \text{»} \quad \Delta'' = \frac{8\,(2m-23)\,\Delta'}{7\,(m+20)},$$

$$p'''' = \frac{4\,(m-1)\,p'''}{7m+2} \quad \text{»} \quad \Delta''' = \frac{3\,(5m+4)\,\Delta''}{4\,(7m+2)}.$$

Setzt man für einen besonderen Fall $m = 70$, so geben die vorhergehenden Ausdrücke

$$p' = 0.02746\,\alpha \quad \text{und} \quad \Delta = 1.01071\,\alpha,$$

$$p'' = 0.03310\,\alpha \quad \text{»} \quad \Delta' = 0.04099\,\alpha,$$

$$p''' = 0.03906\,\alpha \quad \text{»} \quad \Delta'' = 0.06090\,\alpha,$$

$$p'''' = 0.02191\,\alpha \quad \text{»} \quad \Delta''' = 0.03286\,\alpha,$$

also auch die Verhältnisse

$$\frac{p'}{p''} = 0.83, \quad \frac{p'}{p'''} = 0.70, \quad \frac{p'}{p''''} = 1.3$$

$$\text{und} \quad \frac{\Delta'}{\Delta''} = 0.67, \quad \frac{\Delta'}{\Delta'''} = 1.25$$

nahe mit den Verhältnissen der vorhergehenden Tafel übereinstimmend. Eine nur sehr geringe Änderung der beiden Elemente B' und B'', oder der Öffnungshalbmesser würde hinreichen, die Übereinstimmung der Theorie mit den Abmessungen, wenn es nothwendig wäre, noch weiter zu treiben, vorausgesetzt, daſs man sich in den durch die vorhergehende Tafel gegebenen Abmessungen der Brennweiten und der Distanzen der Linsen noch bis auf die letzten Hunderttheile des Zolles versichert halten kann.

V.

Berechnung der Vortheile des Banquiers im Pharaospiele;

von

Gustav Adolph Greisinger,

Hauptmann im k. k. Ingenieurs-Corps.

Aufgabe.

A verpflichtet sich mit *B* unter folgenden Bedingungen zu spielen:

B nimmt ein Spiel von 52 Karten (wie das beim Whist gebräuchliche), und mischt es beliebig, zieht dann eine Karte nach der andern ab, und legt die ungeraden auf die eine, die geraden auf die andere Seite. *A* setzt eine Anzahl Gulden $= n$ auf eine beliebige Karte, z. B. auf die Dame (ohne Berücksichtigung der Farbe), welchen Satz er an *B* verliert, wenn die Dame als ungerade Karte, und von *B* gewinnt, wenn sie als gerade Karte erscheint. *B* behält sich aber vor, dafs ihm *A* die Hälfte des Satzes *n* zahlen müsse, wenn die Dame als gerade und ungerade in demselben Paare erscheint, dafs *A* das ganze Spiel von 52 Karten mit Beibehaltung des Satzes *n* auf der Dame durchspiele, und dafs endlich die letzte Karte (die auf der dem *A* günstigen Seite liegt) nichts gelte.

Auflösung.

Um uns diese zu erleichtern, wollen wir anfangs nur den aus den Doubletten (dem Erscheinen der Dame als ungerade und gerade in demselben Paare) für *B* entspringenden wahrscheinlichen Gewinn suchen.

Bedenken wir, dafs unter $2x$ Karten $1.2.3.4 \ldots 2x$

verschiedene Permutationen gleich möglich sind, die nach der Stellung, welche die vier Damen darin behaupten, theils dem A, theils dem B, theils keinem von beiden Gewinn bringen, so müfsten wir, um unsere Aufgabe zu lösen, alle dem Banquier aus den einzelnen Permutationen entspringenden Gewinnste, getheilt durch $1.2.3.4....2x$, addiren, hievon die Summe aller dem A entspringenden Gewinnste, ebenfalls getheilt durch $1.2.3.4....2x$, abziehen, um so den wahrscheinlichen Gewinn des B bei einmaligem Durchspielen zu finden.

Mit andern Worten, wir müfsten die Summe aller Gewinnsterwartungen des A von jener des B (bei einmaligem Durchspielen) abziehen, der bejahende Unterschied gibt den wahrscheinlichen Gewinn des B.

So ungeheuer dieses Unternehmen auf den ersten Blick scheint, so wird es durch die Betrachtung ungemein vereinfacht, dafs nur die Stellungen der vier Damen überhaupt, nicht aber die Permutation derselben, noch jene der übrigen $2x-4$ Karten auf den Gang des Spiels, das ist auf Gewinn oder Verlust des A und B einen Einflufs übt. In Rücksicht auf *diesen* lassen sich sämmtliche Permutationen in neun Classen theilen, wovon drei dem A, fünf dem B, und eine keinem von beiden Gewinn bringen. Sie sind:

Zu Gunsten des A.

Iste Classe. Alle vier Damen als zweite Karten vierer Paare erscheinend. Gewinn des $A = n + n + n + n = 4n$.

IIte Classe. Drei Damen als zweite Karten dreier Paare, die vierte aber als erste Karte eines Paares, nirgends zwei Damen in demselben Paare. Gewinn für $A = n + n + n - n = 2n$.

IIIte Classe. Zwei Damen als zweite Karten zweier Paare,

die beiden andern in einem Paare beisammen. Gewinn des $A = n + n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$.

Zu Gunsten des *B*.

IV^te Classe. Vier Damen als erste Karte vierer Paare. Gewinn des $B = n + n + n + n = 4n$.

Vte Classe. Drei Damen als erste Karten dreier Paare, die vierte als zweite Karte eines Paares, nirgends zwei Damen in demselben Paare. Gewinn des B

$$= n + n + n - n = 2n.$$

VI^ste Classe. Eine Dame als erste Karte eines Paares; die zweite als zweite Karte eines andern; die beiden übrigen in einem Paare beisammen. Gewinn des B $= n - n + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$.

VII^te Classe. Zwei Damen als erste Karten in zwei Paaren, die beiden andern in einem Paare beisammen. Gewinn des $B = n + n + \frac{n}{2} = \frac{5n}{2}$.

VIII^te Classe. Alle vier Damen in zwei Paaren. Gewinn des $B = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$.

Weder *A* noch *B* günstig.

IX^te Classe. Zwei Damen als erste Karten zweier Paare, die beiden andern als zweite Karten zweier andern Paare. Gewinn des $A = -n - n + n + n = 0$.
Gewinn des $B = + n + n - n - n = 0$.

* * *

Suchen wir nun zuvörderst, wie viel Permutationen in jeder dieser Classen enthalten sind, wenn wir auf die Permutation der vier Damen unter sich, und auf jene der übrigen $2x - 4$ Karten keine Rücksicht nehmen; dann geben ihre Anzahlen, mit

$1 . 2 . 3 . 4 \times 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . 2x - 4$ multiplicirt, die Zahlen der in jeder Classe wirklich enthaltenen gleichmöglichen Stellungen der $2x$ Karten.

I[ste] Classe. Hier bilden die vier Damen in ihren verschiedenen Stellungen alle Combinationen zu vieren unter x Paaren. Diese Classe enthält folglich

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 . 2 . 3 . 4} \text{ Stellungen.}$$

II[te] Classe. Hier kann die vierte Dame x verschiedene Stellungen einnehmen, und bei jeder derselben können die übrigen drei Damen in allen Paaren, mit Ausnahme desjenigen, worin die erste sich befindet, also in $x - 1$ Paaren als Combinationen zu dreien erscheinen. Diese Classe enthält also

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 . 2 . 3} \text{ Stellungen.}$$

III[te] Classe. Hier können zwei Damen in jedem der x Paare beisammen seyn, also x verschiedene Stellungen einnehmen; bei einer jeden derselben können die übrigen zwei Damen alle Combinationen zu zweien unter den übrigen $(x - 1)$ Paaren bilden. Diese Classe enthält folglich $\frac{x(x-1)(x-2)}{1 . 2}$ Stellungen.

IV[te] Classe. Die Zahl der darin enthaltenen Stellungen ist gleich jener der I[sten] Classe $= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 . 2 . 3 . 4}$.

V[te] Classe. Die Zahl der darin enthaltenen Stellungen ist gleich jener der II[ten] Classe $= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 . 2 . 3}$.

VI[ste] Classe. Hier können die zwei in einem Paare befindlichen Damen x verschiedene Stellungen einnehmen, die dritte Dame kann bei jeder derselben $x - 1$ Mal, die vierte endlich bei jeder der hierdurch entstandenen Stellungen $x - 2$ Mal angebracht werden. Diese Classe enthält also $x(x-1)(x-2)$ Stellungen.

VII^{te} Classe. Die Zahl der in ihr enthaltenen Stellungen ist jener der III^{ten} Classe gleich $= \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2}$.

VIII^{te} Classe. Hier bilden die zwei Paare Damen alle Combinationen zu zweien unter x Paaren. Diese Classe enthält also $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}$ Stellungen.

IX^{te} Classe. Hier bilden zwei Damen alle Combinationen zu zweien unter x Paaren, und bei jeder dieser Stellungen können die beiden andern Damen so oftmals angebracht werden, als Combinationen zu zweien unter den übrigen $x-2$ Paaren möglich sind. Diese Classe enthält also $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2}$ Stellungen.

Die Zahlen der in den neun Classen enthaltenen Stellungen, mit $1.2.3.4 \times 1.2.3.4 \ldots (2x-4)$ multiplicirt, geben die Zahlen der in jeder Classe enthaltenen gleichmöglichen Permutationen, deren Summe nothwendig $1.2.3.4 \ldots (2x-1)\, 2x$ seyn mufs. Wir erhalten so:

I^{ste} Classe. $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} . 1.2.3.4 \times 1.2.3 \ldots 2x-4$
$= x(x-1)(x-2)(x-3) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

II^{te} Classe. $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} . 1.2.3.4 \times 1.2.3.4 \ldots 2x-4$
$= 4 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

III^{te} Classe. $= \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} . 1.2.3.4 \times 1.2.3.4 \ldots 2x-4$
$= 3 . 4 . x(x-1)(x-2) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

IV^{te} Classe. $= x(x-1)(x-2)(x-3) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

Vte Classe. $= 4x(x-1)(x-2)(x-3) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

VI^{ste} Classe $= 1.2.3.4.x(x-1)(x-2) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

VII^{te} Classe. $= 3 . 4 . x(x-1)(x-2) . 1.2.3.4 \ldots 2x-4.$

VIII^{te} Classe. $= \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} . 1 . 2 . 3 . 4 \times 1.2.3.4 \ldots 2x-4$
$= 3 . 4 . x(x-1) . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots 2x-4.$

IX^to Classe. $= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,.\,1\,.\,2} . 1.2.3.4 \times 1.2.3.4 \ldots 2x-4$

$= 1.2.3.x(x-1)(x-2)(x-3).1.2.3.4\ldots 2x-4.$

Die Summe aller dieser Ausdrücke ist offenbar:

$$[16x(x-1)(x-2)(x-3)+48x(x-1)(x-2)+12x(x-1)]1.2.3\ldots 2x-4$$
$$= (16x^4 - 48x^3 + 44x^2 - 12x).1.2.3.4\ldots 2x-4$$
$$= (4x^3 - 12x^2 + 11x - 3).2.1.2.3.4\ldots 2x-4.2x$$
$$= (x-1)(2x-1)(2x-3).2.1.2.3.4\ldots(2x-4)2x$$
$$= 1.2.3.4.5\ldots(2x-4)(2x-3)(2x-2)(2x-1)2x,$$

wie es seyn mufs.

Multipliciren wir nun die Zahlen der in den ersten drei Classen enthaltenen Permutationen mit dem aus jeder derselben für *A* entspringenden Gewinne, addiren alle diese Producte, und theilen diese Summe durch

$$1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,\ldots\,2x,$$

so ist diefs die Summe aller Gewinnsterwartungen des *A*, so wie dasselbe Verfahren mit den übrigen fünf Classen (die letzte hat keinen Einflufs) die Summe aller Gewinnsterwartungen des *B* gibt.

Die erstere von letzterer abgezogen gibt uns endlich den wahrscheinlichen Gewinn des *B* bei einmaligem Durchspielen des Spiels.

Für *A* erhalten wir so:

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3).1.2.3.4\ldots 2x-4\times 4n}{1.2.3.4\ldots 2x}$$
$$+\frac{4x(x-1)(x-2)(x-3).1.2.3.4\ldots 2x-4\times 2n}{1.2.3.4\ldots 2x}$$
$$+\frac{3.4.x(x-1)(x-2).1.2.3.4\ldots 2x-4\times \frac{3}{2}n}{1.2.3.4\ldots 2x}.$$

Für *B* erhalten wir:

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3).1.2.3.4\ldots 2x-4\times 4n}{1.2.3.4\ldots 2x}$$

$$+\frac{4x(x-1)(x-2)(x-3).1.2.3.4\ldots 2x-4\times 2n}{1.2.3.4\ldots 2x}$$

$$+\frac{1.2.3.4.x(x-1)(x-2).1.2.3.4\ldots 2x-4\times \frac{1}{2}n}{1.2.3.4\ldots 2x}$$

$$+\frac{3.4.x(x-1)(x-2).1.2.3.4\ldots 2x-4\times \frac{5}{2}n}{1.2.3.4\ldots 2x}$$

$$+\frac{3.4.x(x-1).1.2.3.4\ldots 2x-4\times n}{1.2.3.4\ldots 2x}.$$

Bei Vergleichung der beiden Summen findet sich ihr Unterschied:

$$=\frac{1.2.3.4.n\times 1.2.3\ldots 2x-4\times x(x-1)(x-2)}{1.2.3.4\ldots 2x}$$

$$+\frac{3.4.n.1.2.3.4\ldots 2x-4.(x-1)x}{1.2.3.4\ldots 2x}$$

$$=\frac{2.1.2.3.4.n.1.2.3.4\ldots 2x-4.x(x-1)(x-2)}{2.1.2.3.4\ldots 2x}$$

$$+\frac{1.2.3.4.n.1.2.3.4\ldots 2x-4.(x-1)x}{2.1.2.3.4\ldots 2x}$$

$$=\frac{n(2.(x-2)+1)1.2.3.4\ldots 2x-4.x(x-1)}{1.2.1.2.3.4\ldots 2x}$$

$$=\frac{n.(2x-3)1.2.3.4\ldots 2x-4.x(x-1)}{1.2.1.2.3.4\ldots 2x}$$

$$=\frac{3n.1.2.3.4.(2x-4)(2x-3)(2x-2)2x}{1.2.3.4\ldots 2x}=\frac{3n}{2x-1}.$$

So reducirt sich die ganze Rechnung auf einen höchst einfachen Ausdruck, und man sieht leicht, dafs der Geübtere durch Hinweglassung der Isten, IIten, IVten, Vten und IXten Classe, die sich offenbar tilgen mufsten, so wie durch Unterdrückung des Factors

$$1.2.3.4\ldots 2x-4$$

im Zähler und Nenner sämmtlicher Producte sie sehr vereinfachen konnte.

Was den Vortheil des B durch das Nichtgelten der letzten Karte anbelangt, so entspringt dieser nur aus jenen Permutationen, in welchen eine Dame als letzte Karte erscheint. So oft dieſs der Fall ist, und die vorletzte Karte dabei keine Dame ist, gewinnt B augenscheinlich n; oder vielmehr A erhält n nicht, welches ihm doch, wenn die letzte Karte gälte, gehörte. Ist aber gleichzeitig auch die vorletzte Karte eine Dame, so gewinnt B offenbar $\frac{n}{2}$; denn gälte die letzte Karte, so entstünde eine Doublette, und B gewänne nur $\frac{n}{2}$, während er jetzt n gewinnt. Die Zahl der Permutationen, bei denen die beiden letzten Karten Damen sind, findet sich leicht $= 3 \,.\, 4 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots 2x - 2$, und der hieraus für B entspringende wahrscheinliche Gewinn durch die letzte Karte

$$= \frac{3 \,.\, 4 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots 2x-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots 2x} \,.\, \frac{n}{2} = \frac{6n}{(2x-1)\,2x} = \frac{3n}{x(2x-1)}.$$

Eben so leicht findet man die Zahl der Permutationen, bei denen die letzte Karte eine Dame, die vorletzte aber keine ist $= 4 \,.\, (2x-4)\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, (2x-2)$, und hieraus entspringt dem B der wahrscheinliche Gewinn

$$= \frac{4n\,(2x-4) \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots 2x-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots 2x}$$

$$= \frac{4n\,(2x-4)}{(2x-1)\,2x} = \frac{2n\,(2x-4)}{x\,(2x-1)}.$$

Durch das Nichtgelten der letzten Karte erwächst also dem B ein wahrscheinlicher Gewinn

$$= \frac{3n}{x\,(2x-1)} + \frac{2n\,(2x-4)}{x\,(2x-1)} = \frac{(4x-5)\,n}{x\,(2x-1)}.$$

Addirt man hiezu den früher gefundenen, dem B aus den Doubletten entspringenden wahrscheinlichen Gewinn $= \frac{3n}{2x-1}$, so erhalten wir

$$\frac{(4x-5)n}{x(2x-1)} + \frac{3n}{2x-1} = \frac{(4x-5)n+3nx}{x(2x-1)} = \frac{(7x-5)n}{x(2x-1)}$$

als den gesammten wahrscheinlichen Gewinn des Banquiers bei einmaligem Durchspielen des Spiels unter den angeführten Bedingungen. Setzen wir nunmehr $x=26$, so wird dieser Gewinn

$$= \frac{(182-5)n}{26.51} = \frac{177\,n}{1326} = (0.1334\ldots.)n$$

über $13\,^1/_3$ Procent des Satzes.

Herr *Brunacci* hat im ersten Theile seines vortrefflichen Werkes: *Corso di matematica sublime. Tomo I°. Firenze* 1804, Seite 279—291, die so eben abgehandelte Aufgabe, genau unter denselben Bedingungen wie wir, mittelst der Differenzrechnung gelöst. Allein es ist zu bedauern, daſs dieser groſse Mathematiker nicht vorsichtig genug zu Werke gegangen ist. Er verliert im Verfolge seiner Behandlung aus den Augen, was er eigentlich sucht, und gelangt so zu einem Resultate von $15\,^1/_2$ Procent circa. Er würde das Doppelte unseres Resultates, nämlich 26,69 .... Procente gefunden haben, wenn er nicht bei dem Übergange von der gefundenen Formel zu Zahlen einen neuen Fehlschluſs gemacht hätte, der die Folgen seines früheren Irrthumes etwas mildert. Das Fehlerhafte in dem Verfahren des Herrn *Brunacci* ist es, was mich veranlaſste, die Auflösung unsers Problems auf dem directesten Wege zu suchen, der uns zu dem Resultate von $13\,^1/_3$ Procent führte.

Da übrigens die Art, wie Hr. *Brunacci* die Differenzrechnung zur Auflösung unserer Aufgabe verwendet, äuſserst sinnreich, und eines so groſsen Mathematikers würdig ist, so will ich sie in dem Folgenden, unter Vermeidung seines Irrthums, anwenden, und wir werden dann unfehlbar unser bereits gefundenes Resultat wieder finden.

Herr *Brunacci* löst die Aufgabe anfangs ebenfalls nur in Rücksicht auf die Doubletten, und berechnet erst nachträglich den aus der letzten Karte entspringenden Vortheil des *B*. In diesem letztern Theile der Rechnung stimmt er ganz mit uns überein. Seine Methode zur Bestimmung des aus den Doubletten entspringenden wahrscheinlichen Gewinns des *B* besteht im Wesentlichen darin, daſs er die Summe der Gewinnsterwartungen des *B*, und jene des *A* in zwei Theile spaltet, deren einer aus dem ersten Kartenpaare, der andere aber aus den übrigen $x-1$ Paaren entspringt, wodurch er zu Differenzgleichungen gelangt, deren Integrirung keiner Schwierigkeit unterliegt. Der Unterschied der beiden Summen gibt dann den wahrscheinlichen Gewinn des *B*.

Wir werden das Verfahren des Hrn. *Brunacci* dadurch noch vereinfachen, da wir gleich unmittelbar diesen Unterschied der Summen der Gewinnsterwartungen des *A* und *B* als Functionen von x suchen, indem wir übrigens auch wieder vorläufig nur den aus den Doubletten entspringenden Gewinn des *B* berücksichtigen. Hiezu wird es aber nöthig (was auch Hr. *Brunacci* thut), die Aufgabe erst für eine, dann für zwei, für drei, und endlich für vier Damen unter $2x$ Karten zu lösen, wie man sich aus dem Verfolge der Auflösung überzeugen wird.

Nennen wir die Wahrscheinlichkeit, daſs im ersten Paare sich keine Dame befindet, bei einer, zwei, drei, vier Damen unter $2x$ Karten . . P'_1, P'_2, P'_3, P'_4;

jene, daſs im ersten Paare sich eine dem *B* günstige Dame befindet, wie oben . . . . . P''_1, P''_2, P''_3, P''_4;

jene, daſs im ersten Paare sich eine dem *A* günstige Dame befindet, wie oben . . . . . . P'''_1, P'''_2, P'''_3, P'''_4;

jene endlich, daſs im ersten Paare sich zwei Damen befinden, wie oben . . . . . . P_1'''', P_2'''', P_3'''', P_4'''';

ferner den wahrscheinlichen Gewinn des B
für eine Dame unter $2x$ Karten . . . . . . $F^1 x$,
für zwei Damen unter $2x$ Karten . . . . . $F^2 x$,
für drei Damen unter $2x$ Karten . . . . . $F^3 x$,
für vier Damen unter $2x$ Karten . . . . . $F^4 x$:
so wird

I. für eine Dame unter $2x$ Karten:

$$P_1' = \frac{x-1}{x} \,.\; P_1'' = \frac{1}{2x} \,.\; P_1''' = \frac{1}{2x} \,.\; P_1'''' = 0 \,.\; F^1 x = 0.$$

II. Für zwei Damen unter $2x$ Karten:

$$P_2' = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} \,.\; P_2'' = \frac{(2x-2)}{x(2x-1)} \,.\; P_2''' = \frac{(2x-2)}{x(2x-1)}$$

$$P_2'''' = \frac{1}{x(2x-1)}.$$

Um aber F_x'', den Unterschied der Summen der Gewinnsterwartungen des A und B zu bestimmen, oder welches eben so viel ist, die Summe sämmtlicher Gewinnsterwartungen des A und B, die erstere verneinend genommen, theilen wir diese in vier Classen, je nachdem in dem ersten Paare keine Dame, eine dem A günstige, eine dem B günstige, oder endlich zwei Damen sich befinden. So enthält die erste dieser Classen, deren Wahrscheinlichkeit $P_2' = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}$ ist, offenbar

$$\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} \left[0 + F_{x-1}^2\right].$$

Die zweite Classe aber, deren Wahrscheinlichkeit $P_2'' = \frac{(2x-2)}{x(2x-1)}$ ist, enthält

$$\frac{(2x-2)}{x(2x-1)} \left[n + F_{x-1}^1\right] = \frac{(2x-2)\,n}{x(2x-1)},$$ weil $F_{x-1}^1 = 0$ ist.

Die dritte Classe, deren Wahrscheinlichkeit $P'''_2 = \frac{2x-2}{x(2x-1)}$, enthält

$$\frac{2x-2}{x(2x-1)}\left[-n + F^1_{x-1}\right] = -\frac{(2x-2)n}{x(2x-1)},$$

weil wieder $F^1_{x-1} = 0$ ist.

Die vierte Classe endlich, deren Wahrscheinlichkeit $P''''_2 = \frac{1}{x(2x-1)}$, enthält

$$\frac{1}{x(2x-1)}\left[\frac{n}{2} + F^1_{x-1}\right] = \frac{n}{2x(2x-1)}, \text{ da } F^1_{x-1} = 0.$$

Alle vier Classen, mit ihren Zeichen addirt, geben

$$F^2_x = \frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)} \cdot F^2_{x-1} + \frac{n}{2x(2x-1)}.$$

Um hieraus F^2_x zu finden, multipliciren wir die Gleichung mit $x(2x-1)$, und erhalten

$$x(2x-1)\,F^2_x = (x-1)(2x-3)\,F^2_{x-1} + \frac{n}{2};$$

setzen dann $x(2x-1)\,F^2_x = p_x$, so wird

$$F^2_x = \frac{p_x}{x(2x-1)} \text{ und } F^2_{x-1} = \frac{p_{x-1}}{(x-1)(2x-3)},$$

also auch $p_x = p_{x-1} + \frac{n}{2}$; ferner auch $p_{x+1} = p_x + \frac{n}{2}$, endlich Δ (Differenz) $p_x = \frac{n}{2}$, und wenn wir integriren $p_x = \Sigma\frac{n}{2} = \frac{nx}{2} + Const.$ Allein für $x = 0$ wird

$F^2_x = 0$, also auch $C = 0$, $p_x = \frac{nx}{2}$ und

$$F^2_x = \frac{nx}{2x(2x-1)} = \frac{n}{2(2x-1)}.$$

III. Für drei Damen unter $2x$ Karten.

Hier wird $P'_3 = \frac{(x-2)(2x-3)}{x(2x-1)}$, $P''_3 = \frac{(2x-3)3}{x(2x-1)}$,

$$P'''_3 = \frac{(2x-3)3}{x(2x-1)} \text{ und } P''''_3 = \frac{3}{x(2x-1)}.$$

Nun entspringen dem B aus den vier obigen Classen:

aus der Isten $\frac{(x-2)(2x-3)}{x(2x-1)}\left[0+F^3_{x-1}\right]$,

aus der IIten $\frac{(2x-3)3}{2x(2x-1)}\left[n+F^2_{x-1}\right]$,

aus der IIIten $\frac{(2x-3)3}{2x(2x-1)}\left[-n+F^2_{x-1}\right]$,

aus der IVten $\frac{3}{x(2x-1)}\left[\frac{n}{2}+F^1_{x-1}\right]$. Also wird

$$F^3_x=\frac{(x-2)(2x-3)}{x(2x-1)}F^3_{x-1}+\frac{(2x-3)3}{x(x-1)}F^2_{x-1}+\frac{3n}{2x(2x-1)},$$

weil $F^1_{x-1}=0$.

Es ist aber, wie wir fanden,

$$F^2_x=\frac{n}{2(2x-1)},\quad\text{also}\quad F^2_{x-1}=\frac{n}{2(2x-3)},$$

mithin $F^3_x=\frac{(x-2)(2x-3)}{x(2x-1)}F^3_{x-1}+\frac{3n}{x(2x-1)}$.

Multipliciren wir mit $x(2x-1)$, so wird

$$x(2x-1)\cdot F^3_x=(x-2)(2x-3)\,F^3_{x-1}+3n,$$

und wenn wir $x(2x-1)\,F^3_x=q_x$, also $F^3_x=\frac{q_x}{x(2x-1)}$

setzen, wodurch $F^3_{x-1}=\frac{q_{x-1}}{(x-1)(2x-3)}$ wird, folgt

$$q_x=\frac{x-2}{x-1}\,q_{x-1}+3n.$$

Abermals mit $(x-1)$ multiplicirt, wird

$$(x-1)\,q_x=(x-2)\,q_{x-1}+3n(x-1)$$

und $(x-1)\,q_x=r_x$ gesetzt,

wodurch $q_x=\frac{r_x}{x-1}$ und $q_{x-1}=\frac{r_{x-1}}{x-2}$ wird,

erhalten wir

$$r_x=r_{x-1}+3n(x-1),\quad r_{x+1}=r_x+3nx$$

oder $\Delta r_x=3nx$.

Endlich wird $r_x=\Sigma 3nx$, oder weil

$$\Sigma x=\frac{x(x-1)}{2}+C,\quad r_x=\frac{3nx(x-1)}{2}+C,$$

$$q_x = \frac{3nx}{2} + \frac{C}{x-1} \quad \text{und}$$

$$F^3_x = \frac{\frac{3nx}{2} + \frac{C}{x-1}}{x(2x-1)} = \frac{3n}{2(2x-1)} + C,$$

wobei jedoch C wieder $=0$ gefunden wird.

IV. Für vier Damen unter $2x$ Karten.

Hier wird $P'_4 = \frac{(x-2)(2x-5)}{x(2x-1)}$, $P''_4 = \frac{(2x-4)2}{x(2x-1)}$,

$$P'''_4 = \frac{(2x-4)2}{x(2x-1)} \quad \text{und} \quad P''''_4 = \frac{C}{x(2x-1)}.$$

Nun entspringen für B aus den obigen vier Classen:

aus der I^sten $\frac{(x-2)(2x-5)}{x(2x-1)}\left[0 + F^4_{x-1}\right]$,

aus der II^ten $\frac{(2x-4)2}{x(2x-1)}\left[n + F^3_{x-1}\right]$,

aus der III^ten $\frac{(2x-4)2}{x(2x-1)}\left[-n + F^3_{x-1}\right]$,

aus der IV^ten $\frac{C}{x(2x-1)}\left[\frac{n}{2} + F^2_{x-1}\right]$. Also wird

$$F^4_x = \frac{(x-2)(2x-5)}{x(2x-1)} F^4_{x-1} + \frac{(2x-4)4}{x(2x-1)} F^3_{x-1}$$
$$+ \frac{3n}{x(2x-1)} + \frac{6}{x(2x-1)} F^2_{x-1}.$$

Es ist aber, wie wir früher fanden,

$$F^3_x = \frac{3n}{2(2x-1)}, \quad \text{also} \quad F^3_{x-1} = \frac{3n}{2(2x-3)},$$

$$F^2_x = \frac{n}{2(2x-1)}, \qquad F^2_{x-1} = \frac{n}{2(2x-1)},$$

mithin $F^4_x = \frac{(x-2)(2x-5)}{x(2x-1)} F^4_{x-1}$

$$+ \frac{(2x-4)4 \cdot 3n}{x(2x-1)(2x-3)} + \frac{3n}{x(2x-1)} + \frac{6n}{2x(2x-1)(2x-3)}$$

oder $F^4_x = \frac{(x-2)(2x-5)}{x(2x-1)} F^4_{x-1} + \frac{(18x-30)}{x(2x-1)(2x-3)}$,

also auch

$$x(2x-1)\,F^4_x = (x-2)(2x-5)\,F^4_{x-1} + \frac{(18x-30)n}{2x-3}$$

Setzen wir nun $x(2x-1)\,F^4_x = s_x$, also

$$F^4_x = \frac{s_x}{x(2x-1)}\quad F^4_{x-1} = \frac{s_{x-1}}{(x-1)(2x-3)},\ \text{so wird}$$

$$s_x = \frac{(x-2)(2x-5)}{(x-1)(2x-3)}\,s_{x-1} + \frac{(18x-30)n}{2x-3},$$

und mit $(x-1)(2x-3)$ multiplicirt:

$$(x-1)(2x-3)\,s_x = (x-2)(2x-5)\,s_{x-1} + (18x-30)(x-1)n.$$

Und setzen wir

$$(x-1)(2x-3)\,s_x = t_x \quad\text{oder}\quad s_x = \frac{t_x}{(x-1)(2x-3)},$$

wodurch $s_{x-1} = \dfrac{t_{x-1}}{(x-2)(2x-5)}$ wird, so folgt

$$t_x = t_{x-1} + (18x-30)(x-1)n$$

$$\text{und}\quad t_{x+1} = t_x + (18x^2-12x)n,\quad\text{oder}$$

$$\Delta t_x = (18x^2-12x)n \quad\text{und}\quad t_x = \Sigma(18x^2-12x)n + C.$$

Allein

$$\Sigma x^2 = \frac{x(x-1)(2x-1)}{1\,.\,2\,.\,3},\ \text{also}\ \Sigma\,18x^2 = 3x(x-1)(2x-1),$$

und $\Sigma x = \dfrac{x(x-1)}{1\,.\,2}$, also $\Sigma\,12x = 6x(x-1)$, folglich

$$t_x = [3x(x-1)(2x-1) - 6x(x-1)]\,n + C,$$

$$s_x = \frac{t_x}{(x-1)(2x-3)} = n\left[\frac{3x(2x-1)}{2x-3} - \frac{6x}{2x-3}\right] + \frac{C}{(x-1)(2x-3)}$$

und

$$F^4_x = \frac{s\,.\,x}{x(2x-1)} = \frac{2x-3}{3n} - \frac{6n}{(2x-1)(2x-3)} + \frac{C}{x(x-1)(2x-1)(2x-3)}$$

wobei abermals $C = 0$ ist. Also wird

$$F^4_x = \frac{3n}{2x-3} - \frac{6n}{(2x-1)(2x-3)} = \frac{(6x-3)n-6n}{(2x-1)(2x-3)}$$

$$= \frac{(6x-9)n}{(2x-1)(2x-3)} = \frac{3n}{2x-1}.$$

Dasselbe Resultat, welches wir früher auf directem Wege fanden, und zu dem noch der aus der letzten Karte

entspringende wahrscheinliche Gewinn des B zu addiren kommt, den Hr. *Brunacci*, so wie wir $\frac{(4x-5)n}{x(2x-1)}$ findet.

Die genaue Prüfung der Bedingungen unserer Aufgabe hat mich auf ein drittes Verfahren geführt, den gesammten dem Banquier aus den Doubletten sowohl als aus dem Nichtgelten der letzten Karte entspringenden Vortheil zu herechnen, das ich seiner ungemeinen Kürze halber hier mittheile.

Stellen wir uns nämlich vor, statt des Spielers A habe eine Gesellschaft von x Spielern die Verbindlichkeiten und Vortheile desselben so übernommen, daſs der erste für die Ereignisse des ersten Paares, der zweite für jene des zweiten Paares etc., der x^{te} endlich für jene des x^{ten} Paares allein haftet. Der wahrscheinliche Verlust eines jeden der $x-1$ Spieler (den x^{ten} abgerechnet) entspringt augenscheinlich nur aus der Möglichkeit des Eintreffens einer Doublette in dem ihm zugetheilten Paare, in welchem Falle er $\frac{n}{2}$ verliert. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist

$$p_4'''' = \frac{6}{x(2x-1)},$$

und der damit verbundene wahrscheinliche Verlust eines jeden der $x-1$ Spieler

$$\frac{6}{x(2x-1)} \cdot \frac{n}{2} = \frac{3n}{x(2x-1)}.$$

Anders verhält es sich mit dem x^{ten} Spieler; er kann *nie* etwas gewinnen, und verliert jedel Mal n Gulden, so oft die vorletzte Karte eine Dame ist. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist offenbar $\frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$, mithin der wahrscheinliche Verlust des x^{ten} Spielers $\frac{2n}{x}$.

Der wahrscheinliche Verlust aller x Spieler aber, oder

jener des A, wird demnach

$$= \frac{3n(x-1)}{x(2x-1)} + \frac{2n}{x} = \frac{3nx - 3n + 4nx - 2n}{x(2x-1)} = \frac{(7x-5)n}{x(2x-1)},$$

und eben so groſs ist auch der wahrscheinliche Gewinn des B bei einmaligem Durchspielen des Spieles.

Es scheint unmöglich eine einfachere, und dennoch vollkommen befriedigende Auflösung dieses Problems zu finden.

Herr *Brunacci* schlieſst aus seinem Resultate, von $15\,^1/_2$ Procent circa, auf den wahrscheinlichen Vortheil des Banquiers im Pharaospiele. Allein, so viel mir bekannt, sind die Bedingungen desselben nicht *ganz* die voraus angenommenen. Der Spieler ist nämlich nicht verbunden, das Spiel ganz durchzuspielen, sondern darf sich zurückziehen, sobald nach dem Schlusse eines Paares die von ihm gespielte Karte bereits *wenigstens ein Mal* erschienen ist, er wird sich also unfehlbar vor dem letzten Paare retiriren, und selbst vor dem vorletzten, wenn in den beiden letzten Paaren drei Damen enthalten sind, während die letzte Karte (die dem Spieler gezeigt wird) keine Dame ist. So kann der Banquier nicht einmal auf den ganzen aus den Doubletten entspringenden wahrscheinlichen Gewinn $= \frac{3n}{2x-1}$ rechnen, da ihm der aus den Stellungen, worin die zwei letzten, und aus jenen, worin die drei vorletzten Karten Damen sind, entspringende Doublettengewinn $\frac{n}{2}$ des letzten oder vorletzten Paares entgeht.

Die Wahrscheinlichkeit, daſs im letzten Paare zwei Damen sind, findet sich leicht $= \frac{6}{x(2x-1)}$, und der daraus entspringende Doublettengewinn $= \frac{3n}{x(2x-1)}$. Jene aber, daſs die drei vorletzten Karten Damen sind,

während die letzte keine ist $= \frac{6(2x-4)}{x(x-1)(2x-1)(2x-3)}$, und der hieraus entspringende Doublettengewinn

$$= \frac{3(2x-4)n}{x(x-1)(2x-1)(2x-3)}.$$

So bleibt dem Banquier nur der wahrscheinliche Gewinn

$$\frac{3n}{2x-1} - \frac{3n}{x(2x-1)} - \frac{3(2x-4)n}{x(x-1)(2x-1)(2x-3)}.$$

Setzen wir wieder $x=26$, so erhalten wir

$$\frac{12}{17} - \frac{3n}{26 \times 51} - \frac{144n}{26 \times 25 \times 51 \times 49} = \frac{31850n - 1225n - 48n}{541450}$$

$= \frac{30577 . n}{541450} = (0,0565)\,n$ circa $= 5\frac{13}{20}$ Procent circa.

Allein auch dieser Vortheil ist schon bedeutend genug. Setzen wir z. B., dafs die Bank jeden Abend nur vier Stunden spielt, und in jeder Stunde vier Spiele macht, bei deren jedem nur mit 30 Dukaten-Sätzen durchgespielt wird, so beträgt die Summe aller anfänglichen Sätze, in einem Jahre von 365 Tagen, $16 \times 30 \times 365 = 175200$ Dukaten, und der wahrscheinliche Gewinn des Banquiers in diesem Zeitraume

$$= \frac{175200{,}565}{10000} = \frac{1752 \times 565}{100} = \frac{1752 \times 113}{20} = \frac{438 \times 113}{5}$$

$= 9898\frac{4}{5}$ Dukaten circa. Und diese Voraussetzungen dürften für eine gröfsere Spielbank noch sehr gemäfsigt seyn, wenn man bedenkt, dafs viele Spieler, vom Gange des Spiels erhitzt, durch Paroli etc. etc. die ursprünglichen Sätze noch erhöhen. *E pure si trova, chè va a scomettere contro il Banchière! Questo e una riprova che i goffi sono il patrimonio dei farbi!* So schliefst Herr *Brunacci* seine Abhandlung, und *hierin* stimme ich ihm vollkommen bei.

VI.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Neue und verbesserte physikalische Instrumente.

1. *Bellani's* Thermo-Barometer.

(Giornale di Fisica etc. 1827. Serto Bim. p. 455)

Dieses Instrument, welches zugleich Thermometer und Barometer ist, wird durch Fig. 12 und 13 vorgestellt, und zwar durch Fig. 12 in der Lage, wo es als Barometer, durch Fig. 13 in derjenigen, wo es als Thermometer dient. Es ist im Allgemeinen ein Heberbarometer nach *Gay-Lussac's* Einrichtung, wo die zwei weiteren Röhren *A* und *B D* durch eine engere verbunden sind; nur empfiehlt *Bellani* die Verbindungsröhre dieser zwei Theile selbst aus zwei Stücken von ungleicher Weite zu verfertigen, und zwar das weitere Stück *X* unmittelbar an *A* anzuschmelzen, und es bis zu der Stelle reichen zu lassen, wo der Einbug angebracht ist, hier aber ein Thermometerrohr *C* anzubringen, mittelst welchem *X* und *B D* verbunden sind. *X* soll 2 — 3 Millimeter weit seyn.

Die zwei Scalen, nahe an *B D* und *A* angebracht, dienen wie die an gewöhnlichen Heberbarometern zum Messen des Luftdruckes, die dritte an *C* hingegen ist die Thermometerscale. Den Eispunct derselben bestimmt man, indem man das Instrument in die Lage Fig. 13 bringt, und es wie ein zu bestimmendes Thermometer behandelt, den Siedpunct kann man nicht bestimmen, weil die Scale nicht so weit reicht; deſshalb muſs ein zweiter Punct von einem anderen guten Thermometer copirt werden. *Bellani* räth an, dieses Instrument zur

Zeit, wo es nicht gebraucht wird, in die Lage zu bringen, in welcher es als Thermometer dient. Wenn man recht reines Quecksilber zum Füllen nimmt, so darf man bei der kleinen Oberfläche, mit der es von der Luft berührt wird, nicht besorgen, dafs sich daselbst Unreinigkeit absetze.

2. *Watt's* Sonnencompas.

(Philos. journ. Nro. 7, p. 16.)

Wenn man eine Anzahl kleiner Magnetnadeln mittelst eines leichten Körpers mit einander verbindet, so dafs sie nur wenig von einander abstehen, und keine von ihnen dem Erdmagnetismus völlig folgen kann, so zeigen sie nach *Watt's* Behauptung, die er auf Versuche stützt, durch ihre Bewegung die Einwirkung des Sonnenlichtes, der Wärme etc. auf sie an. Die Versuche, welche dieser Behauptung als Basis dienen, wurden mit einer eigenen mannigfaltig abgeänderten Vorrichtung gemacht, die *Watt* Sonnencompas nennt.

Man magnetisire 12 — 15 Nähnadeln von Nro. 10, stecke sie mit den Köpfen, welche die Nordpole haben, in ein rundes, 1 Z. dickes Korkstück, so dafs eine von der anderen um $^1/_6$ Z. absteht, und alle eine senkrechte Richtung haben, bringe dann den Kork auf eine Wasserfläche von 1 $^1/_2$ F. im Durchmesser. Wird nun mäfsiges Licht, Wärme oder Electricität darauf gelenkt, so erfolgt eine Anziehung, während bei Anwendung gröfserer Kräfte dieser Art eine Abstofsung eintritt. Letzteres findet z. B. Statt, wenn man das mittelst einer Linse concentrirte Licht darauf leitet, oder ein heifses Metallstück über die Nadelspitzen hält.

Eine andere noch zweckmäfsigere Einrichtung bekommt dieses Instrument auf folgende Weise: Man befestige 25 wohl magnetisirte Nadeln in einen Korkring

von 3 Z. im Durchmesser nach der Richtung der Halbmesser des Ringes, so daſs das Ganze wie ein Stern aussieht, und die Nord- und Südpole der Magnete abwechselnd aus- und einwärts gerichtet sind, bringe senkrecht auf die Ebene des Ringes ein hufeisenförmiges Drahtstück an, das in der Mitte an ein Stängelchen von Holz befestiget ist. Dieses wird in horizontaler Richtung auf eine verticale Spitze gesetzt, wie eine gewöhnliche Magnetnadel, und zur Herstellung des horizontalen Standes am Ende des Holzstängelchens ein Gegengewicht angebracht. Das Ganze kann zur Abhaltung des Luftzuges unter einen gläsernen Recipienten gestellt werden. Fig. 14 stellt den Apparat vor. Man kann statt des Gegengewichtes auch einen zweiten Magnetstern anbringen. Wird dieser Apparat, sagt *Watt*, von der Sonne beschienen, so dreht er sich einige Stunden lang auf der Spitze, und stellt sich dann in Ruhe in eine Lage, wo eine äuſsere und eine innere Hälfte des Ringes von den Sonnenstrahlen getroffen wird; doch ist diese Ruhe nur scheinbar, denn er folgt dem Stande der Sonne, so lange sie über dem Horizonte ist.

Dieses Instrument soll so empfindlich seyn gegen Licht, Wärme, Electricität etc., daſs es die kleinsten Veränderungen in der Stärke dieser Agentien anzeigt. Das violette und rothe Licht wirket am meisten darauf. Bringt man an den Nadeln eine Scheibe von Scharlach oder rothen Sammt an, so wird das Instrument noch viel empfindlicher; es dreht sich durch den Einfluſs des Sonnenlichtes fast einen ganzen Tag in der Richtung von Ost nach West durch Süd, und wird von einer glühenden Kohle oder einem glühenden Holzstück angezogen; selbst ein nahe gehaltenes Kerzenlicht bewegt es um 40° — 50°. Auch durch Vermehrung der Anzahl der Na-

deln wird die Empfindlichkeit gesteigert. *Watt* wendete deren über 300 an.

Übrigens darf man nicht vergessen, daſs man bei Erscheinungen dieser Art leicht in Irrthum geführt werden kann, und ich führe das Ganze keineswegs als eine ausgemachte Sache an, sondern als etwas, das, wenn es sich bestätiget, allerdings von gröſster Wichtigkeit ist.

B. Über die Wirkung des Mondes auf die Atmosphäre. Von *Flaugergues.*

(Bibl. univ. Décemb. 1827, *pag.* 264 *c. s.)*

Flaugergues, Astronom zu Viviers, machte es sich zur Aufgabe, den Einfluſs des Mondes auf die Atmosphäre mittelst Barometerbeobachtungen zu bestimmen, und begann seine Beobachtungen im Jahre 1808. Um die Wirkung des Mondes von der der Sonne scheiden zu können, muſste die Beobachtung stets bei demselben Sonnenstande angestellt werden, in welchem Falle alle Resultate vom Einflusse der Anziehungskraft der Sonne in gleichem Grade afficirt wurden. *Flaugergues* wählte zur Beobachtungszeit den wahren Mittag, an welchem sich zugleich die Baromoterhöhe beinahe um die Hälfte ihrer täglichen Variation geändert hat. Weil aber auf diese Weise nur täglich ein Mal beobachtet werden konnte, muſsten die Beobachtungen längere Zeit hindurch fortgesetzt werden. *Flaugergues* hielt es für nöthig, sie durch 223 Mondenmonate fortzusetzen. Er begann sie am 19. October 1808, und war so glücklich, das Ende des genannten Termines, nämlich den 18. October 1827, zu erleben, und alle Beobachtungen selbst anzustellen; ein Umstand, der ihnen einen besonderen Werth gibt, weil derselbe Beobachter bei gehöriger Sorgfalt stets ein gleichförmigeres Resultat erhält, als

wenn mehrere, wenn auch sorgfältige Personen, Hände an dieselbe Sache anlegen. Allein dieser Umstand ist es nicht allein, der die hier besprochenen Beobachtungen interessant macht; denn sie sind auch mit einer besonderen Umsicht und Genauigkeit angestellt. *Flaugergues* zog ein Gefäſsbarometer, dessen Röhre 2.46 L. weit war, den übrigen vor, und glaubte es dadurch am besten gegen das Eindringen der Luft zu schützen, daſs er es an der gegen Mittag gelegenen Mauer seines Observatoriums unbeweglich befestigte. Dieses Mittel scheint sich auch völlig bewährt zu haben, indem die mittleren Barometerhöhen aus sechs und sechs Jahren, statt geringer zu erscheinen, wie es hätte der Fall seyn müssen, wenn mit der Zeit Luft in den leeren Raum gekommen wäre, vielmehr sich immer gröſser zeigten. Die mittleren Höhen waren

von	1808 — 1814	gleich	755.09	Millim.
»	1815 — 1820	»	755.26	»
»	1821 — 1826	»	756.14	»

Flaugergues sieht diese Zunahme des Luftdruckes, der auch schon von Anderen bemerkt wurde, als natürliche Folge der groſsen Gasentwickelungen bei vulcanischen Ausbrüchen, Feuersbrünnsten (? *B*) und dem gewöhnlichen Holzverbrennen an.

Übrigens hat *Flaugergues* keine Correction des Barometers vergessen, und alle nach den besten Bestimmungen vorgenommen.

Hier folgt die Tafel seiner Beobachtungen:

Mondesstand.	Anzahl der Beobachtungen.	Mittlere Barometerhöhe in Mill.
Mittlere Höhe im Allgemeinen . .	6915	755.44
Conjunction oder Neumond . . .	234	755.39
Erster Octavschein	234	755.37
Erste Quadratur	234	755.37
Zweiter Octavschein	235	754.65
Opposition oder Vollmond . . .	234	755.23
Dritter Octavschein	234	755.70
Zweite Quadratur	234	756.32
Vierter Octavschein	235	755.48
Nördliches Lunistitium	258	755.73
Südliches »	258	755.42
Mondnähe (Äquat. Parallaxe 60′ 24″)	252	754.72
Mondferne (Äquat. Parallaxe 54′ 4″)	252	755.82

Aus diesen Ergebnissen zieht *Flaugergues* folgende Schlüsse:

1. Während eines synodischen Mondesumlaufes steigt das Barometer regelmäſsig vom zweiten Octanten angefangen, wo es am tiefsten steht, bis zur zweiten Quadratur, wo es den höchsten Stand erreicht hat, und fällt von da wieder, um von neuem zu steigen. Diese ganze Variation beträgt 1.67 Min. Man kann einen synodischen Umlauf des Mondes als Tagesumlauf ansehen, und die Phases des Mondes als Meridiandistanzen; bedenkt man noch dazu, daſs ein mittlerer Mondestag 24 St. 50′ m. Z. dauert, so sieht man wohl ein, daſs während dieses Umlaufes desselben das Barometer durch den Einfluſs seiner anziehenden Kraft regelmäſsig steigt und sinkt, daſs der gröſste Stand eintrifft, wenn der Mond 135° gegen Ost vom Mittag entfernt ist, d. h. um 9 U. 18 3/4′ M. mittlerer Zeit vor seinem Durchgange durch den oberen Meridian, und der geringste, wenn der

Mond 90° davon absteht, d. h. um 6 U. 12 ½′ nach diesem Durchgange. Es herrscht demnach zwischen der Luftfluth und Ebbe, und der des Wassers ein grosser Unterschied, indem bei ersterer in einem Mondestage nur ein Mal derselbe Stand eintritt, bei letzterer hingegen zwei Mal.

2. Die Declination des Mondes modificirt seine Wirkung auf die Atmosphäre, und sie ist (zu Viviers) am gröſsten, wenn die Abweichung südlich ist. Diese Beobachtung widerspricht der Behauptung *Laplace's*, nach welcher das Zeichen der Declination des Mondes und der Sonne auf die Änderungen des Luftdruckes heinen Einfluſs hat.

3. Die Wirkung des Mondes, den Luftdruck zu vermindern, ändert sich mit seiner Entfernung von der Erde, sie ist bei der Mondesnähe gröſser als bei der Mondesferne, wächst also, wenn die Entfernung des Mondes von der Erde abnimmt, woraus sich deutlich ergibt, daſs diese Wirkung in seiner anziehenden Kraft liege.

Flaugergues beachtete auch den Zusammenhang zwischen dem Mondesstande und der ihm entsprechenden Witterung. Folgende Tabelle gibt die Anzahl der Regentage, die bei jedem Mondesstande Statt hatte:

M o n d e s s t a n d.

Neumond	Erstes Viertel	Voll-mond	Letztes Viertel	Mond-ferne	Mond-nähe
77 Tage.	82.	79.	60.	93.	78.

Aus dieser Tabelle sieht man, daſs die Anzahl der Regentage bei jedem Mondesstande dem ihm entsprechenden mittleren Barometerstande gemäſs ist, jedoch so, daſs diese Anzahl der Tage desto gröſser ist, je kleiner der Barometerstand ist.

C. Athembare Luft, in welcher kein Licht brennt.

(Giornale di Fisica etc. 1827. Serto Bim. p. 433.)

In der Gemeinde von Triuggio der Provinz Mailand wurden zwei Brunnen gegraben, die etwa eine ital. Meile von einander entfernt seyn mögen. Einer derselben war 21.75 Meter tief, und zeigte die merkwürdige Eigenthümlichkeit, dafs ein Licht auslöschte, sobald es auf ein Drittel der ganzen Tiefe dem Boden genähert wurde, aufser es hatte einen sehr kleinen Docht, oder es befand sich in einem Eimer. So wie man es aus dem Eimer herausnahm, verlosch es aber augenblicklich; demnach hätte man glauben sollen, dafs darin auch kein Mensch athmen und leben könne. Allein Professor *Perego* erzählt, dafs ein Arbeiter drei Stunden ununterbrochen darin aushalten konnte, und dafs selbst, wenn er abgelöset wurde, seine Nachfolger mit derselben Leichtigkeit drei Stunden ausdauerten. Man konnte mit einem Feuerstahl keinen Zunder anzünden, und selbst das Chlorfeuerzeug erzeugte nur das gewöhnliche Geräusch, das sich beim Entzünden hören läfst, aber man konnte auch damit kein Feuer gewinnen. *Perego* schöpfte eine Flasche dieser Luft, verschlofs sie gut, und untersuchte sie. Sie zeigte alle Spuren von starkem Kohlensäuregehalt; bei näherer Prüfung ergab sich $^1/_6$ des ganzen Volumens an Kohlensäuregas.

Im zweiten Brunnen fand man nicht mehr von diesem Gas, als durch das Athmen der Arbeiter erzeugt werden mufste. Beide Brunnen sind in einer secundären Formation gegraben. Merkwürdig ist es, dafs die Entwickelung dieses Gases nicht fortwährend Statt hatte, und man nach sechs Monaten von dem erwähnten Verhalten der Luft nichts mehr wahrnehmen konnte.

D. Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten, von *Colladon* und *Sturm.*

(Ann. de Chim. et de Phys. T. 35, *p.* 113.)

Diese Arbeit ist die ausführlichste, welche je über diesen Gegenstand unternommen wurde, und erhielt den Preis, den die franz. Academie der Wissenschaften im Jahre 1826 aussetzte. Der Apparat, dessen sich *Colladon* und *Sturm* zur Bestimmung der Zusammendrückbarkeit tropfbarer Flüssigkeiten bedienten, bestand aus zwei ihrer Bestimmung nach wesentlich von einander verschiedenen Theilen; der eine diente zur Bestimmung der Volumenverminderung bei einem bestimmten Drucke, der andere zur Angabe der Gröſse dieses Druckes. Ersterer bestand aus einer mit einem cylindrischen Gefäſse verbundenen Glasröhre, die dem Volumen nach in sehr kleine, aber gleiche Theile getheilt war, und glich einem etwas groſsen offenen Thermometer, der die zu comprimirende Flüssigkeit enthielt. Er wurde Piezometer genannt. Er befand sich in einem weiteren Glascylinder von 12 Decim. Länge, der an einem Ende verschlossen, am anderen aber mit einer Compressionspumpe verbunden war. Zur Seite des Cylinders war ein Thermometer angebracht, er wurde von einem metallenen, mit Wasser gefüllten Kasten umgeben. Zur Messung des Druckes wurde zuerst eine 12.3 Meter hohe, Quecksilber enthaltende Barometerröhre gebraucht; allein weil es zu umständlich war, eine so hohe Quecksilbersäule zu beobachten, und auch die Resultate, der ungleichen Temperatur der Säule wegen, nicht die gehörige Sicherheit gewährten, wurde sie mit einem Manometer vertauscht, das sich in einem zweiten verticalen Glascylinder befand, welcher mit ersterem mittelst einer gekrümmten eisernen Röhre verbunden war. Dieser Cylinder ent-

hielt Wasser, nur am unteren Theile Quecksilber, auf dessen Oberfläche das Manometer ruhte. Der mittelst der Pumpe angebrachte Druck wirkte zugleich auf die zu comprimirende Flüssigkeit, auf das Wasser und Quecksilber im verticalen Cylinder, und bewirkte ein Aufsteigen des letzteren im Manometer, aus dem sich auf die Gröſse des angebrachten Druckes schlieſsen lieſs. Fig. 15 stellt diesen ganzen Apparat vor. Um die gehörige Genauigkeit der Resultate zu erzielen, muſste man darauf sehen, daſs sich bei den Versuchen die Temperatur der Flüssigkeit nicht änderte, und auf Mittel denken, die Adhäsion der Flüssigkeit an die Wände, und die Verminderung des Druckes durch die Reibung der flüssigen Säule in dem Haarröhrchen unschädlich zu machen, und zugleich das Anhäufen der Luft an den Glaswänden zu vermeiden. Die Beständigkeit der Temperatur war durch das Einschlieſsen des horizontalen Cylinders in Wasser erzielt, das bei 0° C. erhalten wurde, die Adhäsion und die Reibung machte man unschädlich, wenn man die Gröſse der Compressionen bei zunehmendem Drucke mit der verglich, welche bei abnehmendem Drucke Statt fand, und das Absetzen der Luft vermied man, wenn man die Flüssigkeit im Piezometer kochte, und groſse Kräfte auf sie wirken lieſs. Die Oberfläche der Flüssigkeit im Piezometer wurde bei den früheren Versuchen durch einen Index von Quecksilber bezeichnet. Diesen brauchten *Colladon* und *Sturm* absichtlich nicht, weil er unrichtige Resultate verursacht, sondern sie beobachteten die freie Oberfläche im Piezometer, die von der Flüssigkeit im horizontalen Cylinder durch eine Luftsäule getrennt war; bei Flüssigkeiten, die Feuchtigkeit anziehen, wurde aber ein Index von Schwefelkohlenstoff angewendet. Weil ferner der angewendete Druck auf die Flüssigkeit im Piezometer, so wie auf die ihn um-

gebende wirkte, durfte man zwar keine Ausdehnung des Piezometers befürchten, aber mit Grund eine Compression der Wände desselben voraussetzen. *Colladon* und *Sturm* setzten voraus, daſs diese nach allen Dimensionen eine gleich starke Ausdehnung erleide, und suchten die Gröſse derselben nach einer Dimension durch Versuche zu bestimmen, bei denen sie einen Glasstab durch ein angehängtes Gewicht dehnten, und seine Verlängerung maſsen. Dagegen wendet *Oersted* (*Poggend.* Bd. 12, S. 158) mit Recht ein, daſs kein treues Resultat erhalten wurde, weil wegen der Abnahme der Dicke der Glasstange die erhaltene Verlängerung nicht auf die cubische Vergröſserung durch eine gleich groſse Kraft schlieſsen läſst. Nimmt man aber das Resultat so an, wie es *Colladon* und *Sturm* thaten, so erhält man durch einen Druck einer Atmosphäre eine cubische Vergröſserung des Piezometers von 33 Zehnmilliontel.

Die folgenden Tabellen geben die Zusammenziehungen der versuchten Flüssigkeiten durch die beigesetzten Kräfte an:

Quecksilber von 0° C.

Barometerst. 0.706 M., Thermometerst. 9° C., ursprüngliches Volumen 622.440.

Druck in Atmosphären.	Grade der Scale.	Druck in Atmosphären.	Grade der Scale.
1	242.5	18	263
2	244.8	20	265
3	246	22	267
4	248	24	269.1
5	249.6	30	275
6	250.8	Rückwärts.	
8	253	24	270
10	255.1	20	265.9
12	257	14	259.7
14	259	10	256
16	260.9	2	245.2

Wasser von 0° C.

Barometerst. 0.7466, Thermometerst. 10°, ursprüngliches Volumen 237.300.

Druck in Atmosphären.	Grade der Scale			
	des luftleeren Wassers.	für eine Atmosphäre.	des nicht luftleer. Wassers.	für eine Atmosphäre.
1	211	12	$675\frac{1}{2}$	—
2	223	$11\frac{1}{8}$	—	—
3	—	—	653	$11\frac{1}{4}$
4	$245\frac{1}{4}$	$11\frac{3}{8}$	$642\frac{1}{4}$	$10\frac{3}{4}$
6	268	$11\frac{1}{10}$	$621\frac{1}{2}$	$10\frac{3}{8}$
8	$290\frac{1}{5}$	12	599	$11\frac{1}{4}$
10	$314\frac{1}{8}$	$11\frac{1}{8}$	—	—
12	$335\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	555	11
16	380	$11\frac{1}{4}$	—	—
18	$403\frac{1}{3}$	$11\frac{1}{2}$	$489\frac{1}{2}$	10
20	$425\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{5}$	—	—
24	$470\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	423	$11\frac{1}{12}$

Alkohol von 11°.6.

Thermometer in Manom. $7^{\circ}\frac{1}{2}$, ursprüngl. Volumen 152660.

Druck in Atmosph.	Grade der Scale	Für eine Atmos.	Zurück.		
			Druck in Atmosph.	Grade der Scale	Für eine Atmos.
1	202	13.85	24	511	12.8
3	235.7	13.2	18	434.5	13.1
6	275.5	13.6	12	356	13.19
12	355.5	13.2	6	277	13.6
18	434	12 8	3	236	13.75
24	511		1	208.5	

Schwefeläther von 0° und 11°.4.

Luftdruck 0.7466 M. Volumen des ersteren 117930, des letzteren 198170.

Druck in Atmosphären.	Grade der Scale des Äthers v. 0°	Für eine Atmosphäre.	Grade der Scale des Äth. v. 11°.4	Für eine Atmosphäre.
1	—	—	658	$29\frac{1}{2}$
3	13	15	599	$28\frac{2}{3}$
6	—	—	513	$28\frac{1}{6}$
12	148	14	344	$27\frac{1}{3}$
18	232	$13\frac{2}{3}$	180	27
24	312	—	18	

Mit Ammoniak gesättigtes Wasser

Therm. in Manom. 10°. Volumen 389360.

Druck in Atmosph.	Grade der Scale.	Für eine Atmosph.	Rückwärts.	
			Druck in Atmosph.	Grade der Scale.
1	580	$15\frac{1}{3}$	16	378
4	534	$13\frac{1}{4}$	$10\frac{2}{3}$	$443\frac{1}{2}$
8	481	$14\frac{1}{4}$	8	481
$10\frac{2}{3}$	443	$12\frac{3}{4}$	4	533
16	375		1	579

Ein zweiter Versuch gab fast genau dieselben Resultate.

Salpeteräther von 0°, Siedpunct bei 21°.

Temp. des Manomet. 10°, Luftdruck 0.7466, Volumen 197740.

Druck in Atmos.	Grade der Scale	Für eine Atmos.	Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	$444\frac{1}{2}$	$13\frac{9}{10}$	6	$372\frac{1}{4}$	$13\frac{1}{2}$
6	575	$13\frac{1}{2}$	18	213	$13\frac{2}{3}$
12	$293\frac{3}{4}$	$13\frac{1}{2}$	24	133	

Essigäther bei 0° C.

Therm. in Manom. 12°, Volumen 233900.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Rückwärts.		
			Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	520	$17\frac{1}{3}$	16	272	$14\frac{7}{8}$
4	468	$16\frac{3}{4}$	8	399	$27\frac{1}{4}$
8	401	$17\frac{3}{4}$	4	468	$17\frac{1}{3}$
$10\frac{2}{3}$	$353\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{4}$	1	520	
16	272				
4	468	$17\frac{1}{2}$			
8	398	16			
16	270				

Salzäther von $11^{0}.2$.

Therm. in Manom. 8°, Volumen 255340.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Zurück.		
			Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	383	21	6	280	$20\frac{1}{6}$
3	341	$20\frac{1}{3}$	3	340.5	$21\frac{1}{4}$
6	280	$20\frac{1}{12}$	1	383	
12	159.5				

Essigsäure von 0^{0}.

Therm. in Manom. $9^{0}.7$, Luftdruck 0.7466, Volumen 239060.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Rückwärts.		
			Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
4	252	$9\frac{1}{4}$	16	364	0
8	289	$9\frac{3}{4}$	$10\frac{2}{3}$	316	$9\frac{3}{8}$
$10\frac{2}{3}$	315	9	8	291	$9\frac{1}{4}$
16	363		4	254	

Concentrirte Schwefelsäure von 0°, Siedpunct über 300°.

Therm. in Manom. $8^{0}.5$, Luftdruck 0.7466, Volumen 152655.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Rückwärts.		
			Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	324	$4\frac{2}{3}$	16	259	$4\frac{1}{4}$
4	310	$4\frac{1}{4}$	12	276	$4\frac{1}{8}$
8	293	$4\frac{1}{4}$	8	$292\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{8}$
12	276	$4\frac{1}{4}$	4	310	$4\frac{1}{2}$
16	259		1	$323\frac{1}{2}$	

Salpetersäure von 0°, Dichte 1.403.

Therm. in Manom. 8°.5, Luftdruck 0.7446, Volumen 214960.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	607.5	$6\frac{2}{3}$	32	397	$6\frac{3}{4}$
4	587	$6\frac{3}{4}$	16	$505\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$
8	560	$6\frac{3}{4}$	12	$532\frac{1}{2}$	$6\frac{5}{8}$
12	533	$6\frac{3}{4}$	8	559	$6\frac{3}{4}$
16	506	$6\frac{13}{16}$	4	586	$6\frac{3}{4}$
32	397		4	588	
			16	507	
			1	614	

Terpentinöhl bei 0° C.

Therm. in Manom. 8°, Luftdruck 0.7466, Volumen 255340.

Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.	Druck in Atmos.	Grade der Scale.	Für eine Atmos.
1	703	21	16	432	$17\frac{1}{2}$
4	640	$17\frac{1}{2}$	12	502	$17\frac{1}{4}$
8	570	17	8	571	$17\frac{1}{2}$
12	502	$17\frac{1}{2}$	4	641	21
16	432		1	704	

Aus diesen Resultaten läſst sich leicht die Compression jeder untersuchten Flüssigkeit für den Druck einer Atmosphäre von bestimmter Stärke in Theilen ihres ganzen Volumens finden. Da man nämlich das ganze Volumen in Theilen der Scale, und auch die Compression für eine Atmosph. nach demselben Maſsstabe kennt, so braucht man nur die letzte Gröſse durch die erstere zu theilen, um die Compression für eine Atmosph. in Theilen des ganzen Volumens zu finden. Allein wegen des bei verschiedenen Versuchen herrschenden verschiedenen Luftdruckes und der verschiedenen Temperatur des Manometers ist es noch überdieſs nöthig, alle Resultate auf eine bestimmte Atmosph. und auf eine bestimmte

Temp. des Manom. zu reduciren. *Colladon* und *Sturm* wählten dazu die Atm. von 0.76 M. und die Temp. von 10° C., und corrigirten auf die ohnehin jedem bekannte Weise die gefundene Comp. Allein das erhaltene Resultat gab nur die scheinbare Compression; um die wahre zu finden, muſs sie um die Gröſse vermehrt werden, welche der Comp. des Glases für denselben Druck entspricht. Diese letztere Gröſse ist 3.3 Zehnmilliontel des ganzen Volumens. Ich stelle nun die auf diesem Wege erhaltenen Resultate in eine Tabelle zusammen. Die Compression ist in Millionteltheile des ganzen Volumens angegeben.

Flüssigkeit.	Scheinbare Compression.	Wirkliche Compression	Anmerkung.
Quecksilber .	1.73	5.03	Alkohol, Schwefeläther, Essigäther und Salzäther werden nicht für gleiche Zunahmen der comprimirenden Kraft um gleich viel zusammengedrückt, sondern die Compression ist desto kleiner, je mehr die Flüssigkeit schon comprimirt ist. Bei Alkohol gilt der erste angegebene Werth v. der 2 — 9ten, der zweite von der 9—21sten Atmosph. Bei Schwefeläther varirt die Compression innerhalb der zwei angegebenen Grenzen von der 3 — 24sten, bei Salzäther von der 1—3ten und 6ten — 12ten Atmosphäre.
Luftleer. Wasser	48	51.3	
Wasser mit Luft	47.2	49.5	
Alkohol . .	92.87	96.2	
	90.24	93.5	
	85 86	89	
Schwefeläther von 0° C.	130 — 118.5	133 — 122	
» 11°.4	146 — 138	150 — 141	
Mit Ammoniak gesät. Wasser	34.7	38	
Salpeteräther .	68.2	71.5	
Essigäther . .	76 — 68	79.3 — 71.3	
Salzäther . .	82.6	85.9	
	78.95	82.25	
Essigsäure . .	39	42.2	
Concent. Schwefelsäure . .	28.6	32	
Salpetersäure .	32.2	35.7	
Terpentinöhl .	69.7	73	

Wärmeentwickelung bei der Compression.

Nachdem auf diese Weise die Gröſse der Compressibilität verschiedener Flüssigkeiten ausgemittelt war, blieb noch übrig, die bei der Compression etwa Statt

ſindende Wärmeentwickelung nachzuweisen. Zu diesem Ende wurde ein gläserner Ballon, in welchem sich ein *Brequet*'sches Thermometer befand, mit luftleerem reinen Wasser gefüllt, und zugleich mit einer Compressionspumpe versehen, um darauf einen bestimmten Druck ausüben zu können. Man hatte es in seiner Macht, diesen Druck langsam wachsen zu lassen, indem man den Pumpenkolben mittelst einer Schraube ohne Ende in Bewegung setzte, oder ihn mittelst eines Hebels innerhalb $^1/_4$ Sec. bis zu 30 Atmosphären zu verstärken. Als auf das Wasser ein langsam bis zu 36 Atm. verstärkter Druck wirkte, bewegte sich der Zeiger des Thermometers, doch hätte man aus der Richtung dieser Bewegung auf eine Statt habende Erkältung schlieſsen müssen, wenn man nicht gewuſst hätte, daſs diese Bewegung von der verschiedenen Compressibilität der Theile der Spirale herrühren könnte. Letzteres muſste um so wahrscheinlicher werden, da die Compression sehr langsam erfolgte, die Wärme hinreichend Zeit hatte, abzuflieſsen, und auch bei einer sehr schnell erfolgenden diese Bewegung des Zeigers nicht gröſser war. Von auſsen angebrachte Hammerschläge bewirkten eine noch gröſsere Bewegung des Zeigers nach derselben Richtung. Bei Alkohol war diese Bewegung kleiner. Bei Schwefeläther konnte man keine solche Bewegung am Zeiger bemerken, wiewohl die Compression auf 30 und 36 Atm. stieg. Offene Quecksilberthermometer gaben Resultate, wie *Brequet's* Instrument. Aus allen diesem ziehen *Colladon* und *Sturm* folgende Schlüsse:

1. Durch schnelle Compression des Wassers mit einer Kraft von 40 Atmosphären steigt seine Temperatur nicht merklich.
2. Alkohol und Schwefeläther erwärmen sich, wenn innerhalb einer $^1/_4$ Sec. ein Druck von 36—40 Atm.

auf sie wirket, nicht über 1° C.; ein schnellerer Druck, etwa durch einen Hammerschlag, bringt an Schwefeläther eine Temperaturerhöhung von 4°—6° hervor.

Einflufs der Compression auf electrische Leitungsfähigkeit.

Um den Einflufs der Compression auf die electrische Leitungsfähigkeit kennen zu lernen, wurde eine aus zwei Stücken zusammengefügte Glasröhre gewählt, welche die Gestalt eines umgekehrten T hatte. Im horizontalen Arme waren die Enden zweier Platindrähte eingeschmolzen, so dafs man mittelst derselben die Electricität durch die Flüssigkeit, welche der Apparat enthielt, leiten konnte. Einer dieser Drähte ging unmittelbar zum Pole eines Trogapparates, der andere communicirte erst mit einem Multiplicator mit zwei Nadeln, und hing mittelst diesem mit dem anderen Pole des Troges zusammen. Eine Druckpumpe diente zum Comprimiren der Flüssigkeit, und ein Manometer, diesen Druck zu messen. Vorläufig wurde die Stärke des Trogapparates so modificirt, dafs die Ablenkung der Magnetnadeln wenigstens um 15° kleiner war, wenn obiges Gefäfs Wasser enthielt, als wenn dieses Gefäfs mit Quecksilber gefüllt war. Wenn nun der Versuch mit reinem Wasser, mit einer concentrirten Ammoniaklösung, oder mit Quecksilber angestellt wurde, und der Druck von 1—30 Atm. wuchs, konnte man keine Veränderung in der Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten wahrnehmen, nur Salpetersäure schien desto weniger zu leiten, je mehr sie comprimirt wurde; denn bei einem Druck von 1 Atm. betrug die Ablenkung der Magnetnadel 47°, bei 10 Atm. 46$^{\circ\,3}/_4$, bei 20 Atm. 46°, bei 30 Atm. 44$^{\circ\,3}/_4$. *Colladon* und *Sturm* meinen aber, diese Verminderung der Ab-

lenkung der Magnetnadel komme nicht unmittelbar von dem verringerten Leitungsvermögen der Salpetersäure her, weil sie weniger compressibel ist als Wasser und eine Ammoniaklösung, deren Leitungsfähigkeit durch Compression nicht geändert wird; sie meinen vielmehr, es rühre dieses von der durch Annäherung der Theile verstärkten Affinität her, und machen sich überhaupt vom Verlaufe der Sache folgende Vorstellung: Die Fortpflanzung eines electrischen Stromes durch eine Flüssigkeit erfolgt auf eine zweifache Weise. Ein Theil der Electricität wird durch die Flüssigkeit unabhängig von jeder chemischen Wirkung geleitet, ein anderer hingegen durch die aus der Zersetzung der Flüssigkeit hervorgehenden electro-positiven und negativen Molecüle von Pol zu Pol übertragen, der Ansicht gemäſs, nach welcher diese Transmission durch eine Reihe von Zersetzungen und Zusammensetzungen erfolgt. Je leichter daher eine Flüssigkeit von der Electricität zersetzt wird, desto leitungsfähiger erscheint sie auch, und jede Ursache, welche der Trennung der Theile widersteht, vermindert auch die Leitungsfähigkeit. Da nun ein starker Druck nach *Hall's* und Anderer Versuchen die Zersetzung hindert, so muſs er auch die Leitungsfähigkeit herabsetzen.

Geschwindigkeit des Schalles im Wasser.

Bekanntlich läſst sich die Geschwindigkeit des Schalles durch die Formel $\sqrt{\frac{Pk}{D\varepsilon}}$ ausdrücken, wo D die Dichte der den Schall fortpflanzenden Flüssigkeit, k die Länge einer cylindrischen Säule dieser Flüssigkeit unter einem bekannten Drucke, und ε die Verminderung dieser Gröſse durch eine bestimmte Vergröſserung des Druckes P ist. Die Gröſse ε hängt demnach von der Com-

pressibilität der Flüssigkeit ab. Wird durch P der Druck einer Quecksilbersäule von 76 Centim. Höhe bezeichnet, so hat man $P = (0.76^m) g m$, wenn m die Dichte des Quecksilbers, und g die Acceleration der Schwere, oder die nach Verlauf der ersten Secunde im freien Fall erlangte Geschwindigkeit nennt.

Colladon und *Sturm* bestimmten nun zuerst die Geschwindigkeit des Schalles im Wasser des Genfer Sees, und verglichen sie mit dem Resultate obiger Formel. Es wurden demnach zwei Stationen im Genfer See ausgewählt, deren genau bestimmte Entfernung 13487 Meter betrug, und zwischen welchen sich, bestimmten Untersuchungen zu Folge, keine Untiefen, Strömungen etc. befanden, welche die Geschwindigkeit des Schalles modificiren konnten, wo auch das Wasser sehr rein ist. An einer Station wurde von einem Schiffe eine 7 Decim. hohe und etwas weniger weite Glocke einen Meter tief ins Wasser gesenkt, und mit einem Hammer, der durch einen Winkelhebel in Bewegung gesetzt wurde, daran geschlagen, um einen Schall im Wasser zu erregen. Den Augenblick der Schallerregung bezeichnete ein Feuersignal, das mittelst Knallpulver durch denselben Zug, welcher den Schlag an der Glocke bewirkte, erregt wurde. Um den Schall an der anderen Station ausserhalb des Wassers vernehmlich zu hören, bedurfte es einer eigenen Vorrichtung, weil er bekanntlich beim Übergang vom Wasser in die Luft ungemein geschwächt wird, und man schon in der Entfernung von 200—300 Met. aufserhalb des Wassers nichts von dem in demselben erregten Schalle wahrnimmt. *Colladon* und *Sturm* wählten dazu eine blecherne, conische, 5 Meter lange Röhre, die in verticaler Richtung im Wasser schwamm, und unten in einen weiten, gebogenen Trichter auslief, nahe wie ein Waldhorn, doch war die Erweiterung mit-

telst einer ebenen verticalen Platte geschlossen, und diese nach der Gegend hingewendet, woher der Schall kommen mufste; am obersten Ende war die Röhre schief abgeschnitten, um das Ohr bequem anhalten zu können. Die Zeit wurde mittelst eines Chronometers gemessen, der sich stopfen liefs, und $^1/_4$ Secunden angab. Bei den Versuchen ward das Ohr des Beobachters an die Öffnung der Röhre gehalten, das Auge nach der Gegend hin gerichtet, wo das Feuersignal erscheinen mufste, mit einer Hand hielt er die Uhr, mit der anderen die daran befindliche Stopfvorrichtung. Die Verfasser meinen aber doch die Zeit des Signals um $^1/_4$ Sec. zu spät angezeigt zu haben. Die Versuche wurden am 7ten, 15ten und 18. November Nachts vorgenommen, und in Summa 44 Mal wiederholt. Die Zeit vom Augenblick der Lichterscheinung bis zur Ankunft des Schalls betrug im Mittel 9 $^1/_4$ Sec. Der kleinste Werth war 9 S., der gröfste 9 $^1/_2$ S. Addirt man zum Mittelwerthe obige $^1/_4$ Sec., so erhält man als Fortpflanzungszeit 9.4 S., und demnach die Geschwindigkeit des Schalls 13487 : 9.4 = 1435 M. Die mittlere Wärme des Wassers in der Richtung des Schalles war, nach Beobachtungen berechnet, 8°.1 C.

Nun sollte die Geschwindigkeit des Schalls im Wasser auch nach obiger Formel berechnet werden. Zu diesem Ende wurde zuerst für das Seewasser die Gröfse ε gesucht, und für die Temperatur von 8° C. gleich 49.5 Milliontel gefunden. Man hatte demnach:

$$D = 1, \quad k = 1000000, \quad \varepsilon = 49.5, \quad g = g^m \,.\, 8088,$$
$$m = 13.544 \text{ (bei } 10^\circ \text{ C.)},$$

und aus diesen Gröfsen die Geschwindigkeit = 1428, mithin nur um 7 M. kleiner, als sie der Versuch lehrte. Diese Übereinstimmung zeigt hinlänglich, dafs die bei der Compression des Wassers frei werdende Wärme sehr

gering sey, denn sonst müſste dadurch der Schall beschleuniget werden.

Colladon und *Sturm* schlieſsen ihre gehaltreiche Arbeit mit einigen Bemerkungen über die Eigenthümlichkeiten der Schallfortpflanzung im Wasser. Eine unter Wasser angeschlagene Glocke gibt immer nur einen kurzen reinen Schall, als wenn zwei Messerklingen an einander geschlagen würden. Diesen Charakter behält der Schall bei, wenn man sich von seiner Quelle entfernt, und nimmt dabei an Stärke ab; in mäſsiger Entfernung kann man nicht unterscheiden, ob der Schall ursprünglich stark war und weit her tönt, oder ob er von einem schwachen Schlage herrührt, und nur einen kurzen Weg zurückgelegt hat. Die Verfasser erklären dieses daraus, daſs die Dauer der Bewegung eines Theils der Flüssigkeit durch den Quotienten aus dem Halbmesser der ursprünglich erschütterten Sphäre der Flüssigkeit in die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in ihr abhänge, und erstere Gröſse beim Wasser sehr klein, die andere hingegen gröſser ist, als bei der Luft. Eine andere Bemerkung ist die, daſs der Schall, wenn er die Oberfläche des Wassers unter einem sehr spitzigen Winkel trifft, gar nicht in die Luft übergeht, wie dieses beim Lichte der Fall ist, und daſs man daher diesen Winkel vergröſsern müsse, wenn man den im Wasser erregten Schall auſser Wasser in groſser Entfernung hören will; dieses ist durch die vorhin beschriebene Röhre geschehen. Der Wellenschlag ändert weder die Intensität des Schalles im Wasser, noch seine Geschwindigkeit; drei bei stürmischem Wetter angestellte Versuche beweisen dieses. Ein Schirm, der dem Schalle in den Weg gestellt wird, vermindert seine Intensität ungemein stark.

E. Electricität.

1. Vergleichung der Empfindlichkeit eines Frosches mit der eines Multiplicators mit zwei Nadeln. Von *L. Nobili.*

(Bibl. univ. Janvier 1828, *p.* 10.*)*

Nobili prüfte die Empfindlichkeit der zwei erwähnten Apparate, indem er mittelst flüssigen und festen Electromotoren, und durch Erwärmung einander berührender Stoffe electrische Ströme erregte, und sie auf beide wirken liefs. Das allgemeine Resultat dieser seiner Vergleichung ist, dafs für hydroelectrische Ströme, die immer die Dazwischenkunft eines Leiters der zweiten Classe fordern, ein entblöfster Froschschenkel ein empfindlicherer Galvanometer ist, als der beste Multiplicator, dafs aber bei thermoelectrischen Strömen, bei denen die Anwendung einer Flüssigkeit nicht nothwendig ist, selbst ein mittelmäfsiger Multiplicator empfindlicher ist als ein Frosch; sobald man aber absichtlich den electrischen Strom durch eine Flüssigkeit leitet, und durch diese auf den Multiplicator wirken läfst, mufs er wieder dem Frosche an Empfindlichkeit weichen.

Wenn man einen Frosch auf die Art als Galvanometer braucht, dafs man den Muskel auf einer, den Nerv auf der anderen Seite berührt, so wirkt er selbst als Electromotor; denn zwei Frösche, die auf die gewöhnliche Weise präparirt sind, und mit einander einen geschlossenen electrischen Kreis bilden, indem der Nerv des einen den Muskel des anderen berührt, zeigen beide alsogleich eine Contraction, während diese an beiden unterbleibt, wenn man die Ordnung umkehrt, und Nerv mit Nerv, Muskel mit Muskel in Berührung bringt. Um bei delicaten Versuchen den Einflufs des durch die elec-

tromotorische Kraft des Frosches erzeugten Stromes aufzuheben, räth *Nobili*, den zu prüfenden Strom nur durch den Nerv, nicht zugleich durch den Muskel zu leiten.

2. Über die Electricität, die ein Metalldraht in einer Flamme erlangt. Von *Becquerel*.

(Ann. de Chim. et de Phys. T. 36, *p.* 328.)

Becquerel stellte auf den Deckel eines sehr guten Condensators eine Glühlampe aus Kupfer, deren Spirale vom Gefäſse mittelst einer Glasröhre getrennt war, während die Basis des Condensators mit der Erde in leitender Verbindung stand. Hebt man den Deckel auf, so findet man, daſs der Alkohol in der Lampe während des Verbrennens eine merkliche Menge negativer Electricität aufgenommen habe, wie es auch zu erwarten war. Man muſste nun glauben, die positive Electricität müsse sich in der den Docht und die Spirale umgebenden Luft befinden. Berührt man die Spirale mit einem Platindraht, den man in der Hand hält, so ändert sich die Erscheinung; man nimmt dadurch alle entwickelte negative Electricität weg, und der Alkohol und das Gefäſs, worin er sich befindet, zeigt positive Electricität. Denselben Effect erhält man, wenn man die glühende Spirale mit einer anderen aus dickerem Drahte umgibt, die nur einige Millimeter von ersterer absteht.

Diese Thatsachen erkläret *Becquerel* durch die von *Ermann* entdeckte Wahrheit über die isolirende und leitende Eigenschaft glühender Platindrähte in Betreff der beiden Electricitäten, und zwar auf folgende Art: Die zwei während des Verbrennens entwickelten Electricitäten befinden sich in einem Gleichgewichte, das in einer gewissen Beziehung steht zu den zwei Electricitäten, die durch Berührung der zwei Metalle erregt werden, und da die glühende Spirale nur die negative

Electricität ableitet, so verbreitet sich die positive in die umgebenden Körper, und ladet den Condensator. *Becquerel* nahm hierauf statt der Glühlampe eine mit Weingeist gefüllte messingene Schale, tauchte einen baumwollenen Docht darein, der durch eine Glasröhre ging, und durch eine Korkscheibe in einer solchen Lage erhalten wurde, daſs die Flamme die Wände der Schale nicht berühren konnte, und zündete diesen Weingeist an. Wurde bald darauf der Condensatordeckel gehoben, so zeigte sich der Alkohol stark negativ electrisch. Die positive Electricität, die sich in der Flamme und in ihrer Nähe befinden muſste, durfte man nicht mit einem darein getauchten Platindrahte suchen, weil dieser gleich glühend wurde, und dadurch der Alkohol positive, der Draht negative Electricität zeigte; dieselbe Wirkung erfolgt auch, wenn der Draht die Flamme nur an einem Puncte berührt, oder einige Millimeter von der Flamme entfernt bleibt. Drähte aus Gold, Silber, Kupfer, Eisen, verhalten sich wie Platindraht. Daraus ergibt sich, daſs man sich zum Aufsuchen der Electricität, welche die Umgebung einer Flamme enthält, keineswegs glühender Metalldrähte bedienen darf, weil die Temperatur ihre Leitungsfähigkeit dahin abändert, daſs sie nur eine der zwei Electricitäten ableiten, und dadurch die Verbreitung der anderen in die leitende Umgebung gestatten.

3. Über die durch Spalten und Drücken der Krystalle erzeugten electrischen Erscheinungen. Von Ebendemselben.

(*Annal. de Chim. et de Phys. T.* 36, *p.* 265.)

Becquerel hat schon vor mehreren Jahren Versuche über die Electrisirung durch Druck bekannt gemacht, und ihnen einiges über Electrisirung durch Spalten des Glim-

mers etc. angereihet. In der neuesten Zeit hat er über die letztere Art der Electricitätserregung näheren Bericht erstattet, und gezeigt, daſs die electrischen Erscheinungen beim Druck und beim Spalten viele Ähnlichkeit mit einander haben. Trennt man nämlich Gyps- oder Glimmerblätter schnell von einander, so erscheint jeder der zwei Theile electrisch, und zwar der eine positiv, der andere negativ. Legt man sie wieder auf einander in eine der natürlichen gleiche Lage, und drückt sie schwach zusammen, so erhält man bei der Trennung wieder dieselben electrischen Erscheinungen, wenn man übrigens die Blätter nicht zu lange mit ihren neuen Flächen dem Einflusse der Luft aussetzt, die wahrscheinlich diese Fläche feucht macht. Es bewirkt also der Druck, durch den die Theile einander genähert werden, dieselben Phänomene, wie die Cohäsionskraft, durch welche auch eine, nur innigere Berührung der Theile hervorgebracht wird. *Becquerel* überzeugte sich durch Spalten von Kalkspath, Schwerspath, Fluſsspath, Topas etc., daſs alle krystallisirten Körper demselben Gesetze unterliegen, wie Glimmer und Gyps, doch muſs der Krystall stets rein gespalten, nicht bloſs gerissen oder gebrochen seyn. *Becquerel* meint, es hänge diese Electricitätserregung von der Erschütterung der Theilchen im Augenblicke der Trennung ab, und diese Erschütterung bestimme auch die Flächen, die eine oder die andere Electricität anzunehmen.

VII.

Anzeige einiger Relationen im sphärischen Dreiecke;

von

Franz Xav. Moth,

gewesenem Supplenten der höheren Mathematik an der Universität zu Prag.

Wenn man der Kürze wegen

$$\frac{a+b+c}{2}=s;\quad \frac{A+B+C}{2}=S$$

setzt, wo $a\,b\,c$ die drei Seiten, und $A\,B\,C$ die drei Winkel, welche den drei Seiten respective entgegen stehen, bedeuten; so hat man für jedes sphärische Dreieck nachstehende sehr bemerkenswerthe Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}&\sin.\tfrac{1}{2}(s-c)\;.\;\cos.\tfrac{1}{2}(s-b)=\\&=\left(\frac{\sin.\frac{1}{2}a}{\cos.\frac{1}{2}A}\right).\sin.[45^0+\tfrac{1}{2}(S\text{-}C)].\cos.[45^0+\tfrac{1}{2}(S\text{-}B)]\\&\cos.\tfrac{1}{2}(s-c)\;.\;\sin.\tfrac{1}{2}(s-b)=\\&=\left(\frac{\sin.\frac{1}{2}a}{\cos.\frac{1}{2}A}\right).\cos.[45^0+\tfrac{1}{2}(S\text{-}C)].\sin.[45^0+\tfrac{1}{2}(S\text{-}B)]\end{aligned}\right\}(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin.\tfrac{1}{2}s\;.\;\cos.\tfrac{1}{2}(s-a)=\\&=\left(\frac{\sin.\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}A}\right).\sin.[45^0+\tfrac{1}{2}(S\text{-}C)].\sin.[45^0+\tfrac{1}{2}(S\text{-}B)]\\&\cos.\tfrac{1}{2}s\;.\;\sin.\tfrac{1}{2}(s-a)=\\&=\left(\frac{\sin.\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}A}\right).\cos.[45^0+\tfrac{1}{2}(S\text{-}C)].\cos.[45^0+\tfrac{1}{2}(S\text{-}B)]\end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin.\tfrac{1}{2}(s-c)\;.\;\sin.\tfrac{1}{2}(s-b)=\\&=-\left(\frac{\cos.\frac{1}{2}a}{\cos.\frac{1}{2}A}\right).\cos.(45^0+\tfrac{1}{2}S).\cos.[45^0+\tfrac{1}{2}(S-A)]\\&\cos.\tfrac{1}{2}(s-c)\;.\;\cos.\tfrac{1}{2}(s-b)=\\&=\left(\frac{\cos.\frac{1}{2}a}{\cos.\frac{1}{2}A}\right).\sin.(45^0+\tfrac{1}{2}S).\sin.[45^0+\tfrac{1}{2}(S-A)]\end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin.\tfrac{1}{2}s\;.\;\sin.\tfrac{1}{2}(s-a)=\\ =\left(\dfrac{\cos.\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}A}\right).\cos.(45^0+\tfrac{1}{2}S).\sin.[45^0+\tfrac{1}{2}(S-A)]\\ \cos.\tfrac{1}{2}s\;.\;\cos.\tfrac{1}{2}(s-a)=\\ =\left(\dfrac{\cos.\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}A}\right).\sin.(45^0+\tfrac{1}{2}S).\cos.[45^0+\tfrac{1}{2}(S-A)]\end{array}\right\}(4)$$

Durch Vertauschung der Gröſsen *a b c*, so wie der Gröſsen *A B C* unter einander lassen sich aus den hier dargestellten Gleichungen noch sechzehn ähnliche finden.

Die Addition und Subtraction je zweier dieser Gleichungen führt theils auf identische, theils auf die *Gauſs*'schen Gleichungen.

Aus diesen Gleichungen lassen sich mehrere sehr wichtige Folgerungen ziehen. Unter andern nachstehende:

$$\frac{\text{tg.}\frac{1}{2}(s-c)}{\text{tg.}\frac{1}{2}(s-b)}=\frac{\text{tg.}[45^0+\frac{1}{2}(S-C)]}{\text{tg.}[45^0+\frac{1}{2}(S-B)]};$$

$$\frac{\cot.\frac{1}{2}s}{\text{tg.}\frac{1}{2}(s-b)}=\frac{\text{tg.}[45^0+\frac{1}{2}S]}{\text{tg.}[45^0+\frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\frac{\text{tg.}\frac{1}{2}(s-a)}{\text{tg.}\frac{1}{2}(s-b)}=\frac{\text{tg.}[45^0+\frac{1}{2}(S-A)]}{\text{tg.}[45^0+\frac{1}{2}(S-B)]};$$

$$\frac{\text{tg.}\frac{1}{2}s}{\text{tg.}\frac{1}{2}(s-a)}=\frac{\text{tg.}[45^0+\frac{1}{2}(S-B)]}{\cot.[45^0+\frac{1}{2}(S-A)]};$$

$$\frac{\text{tg.}\frac{1}{2}(s-c)}{\cot.\frac{1}{2}(s-a)}=-\frac{\text{cotg.}[45^0+\frac{1}{2}S]}{\text{tg.}[45^0+\frac{1}{2}(S-B)]};$$

u. s. w.

Ferner hat man:

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a\;.\;\text{tg.}\tfrac{1}{2}(s-a)=$$
$$=-\frac{\cos.(45^0+\frac{1}{2}S)\;.\;\sin.[45^0+\frac{1}{2}(S-A)]}{\sin.[45^0+\frac{1}{2}(S-B)]\;.\;\sin.[45^0+\frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\text{tg.}\tfrac{1}{2}a\;.\;\text{tg.}\tfrac{1}{2}(s-b)=$$
$$=-\frac{\cos.(45^0+\frac{1}{2}S)\;.\;\cos.[45^0+\frac{1}{2}(S-A)]}{\cos.[45^0+\frac{1}{2}(S-B)]\;.\;\sin.[45^0+\frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$(4)\begin{cases} \operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}a \;.\; \operatorname{cotg}.\tfrac{1}{2}(s-a) = \\ = +\dfrac{\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}S)\;.\;\operatorname{cosin}.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-A)]}{\cos.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-B)]\;.\;\cos.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-C)]}; \\ \operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}a \;.\; \operatorname{cotg}.\tfrac{1}{2}(s-b) = \\ = +\dfrac{\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}S)\;.\;\sin.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-A)]}{\sin.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-B)]\;.\;\cos.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-C)]}; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}a \;.\; \operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}s =$$

$$= -\frac{\cos.(45^\circ+\frac{1}{2}S)\;.\;\sin.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-A)]}{\cos.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-B)]\;.\;\cos.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-C)]};$$

$$\operatorname{tg}.\tfrac{1}{2}a \;.\; \operatorname{cotg}.\tfrac{1}{2}s =$$

$$= +\frac{\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}S)\;.\;\cos.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-A)]}{\sin.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-B)]\;.\;\sin.[45^\circ+\frac{1}{2}(S-C)]}.$$

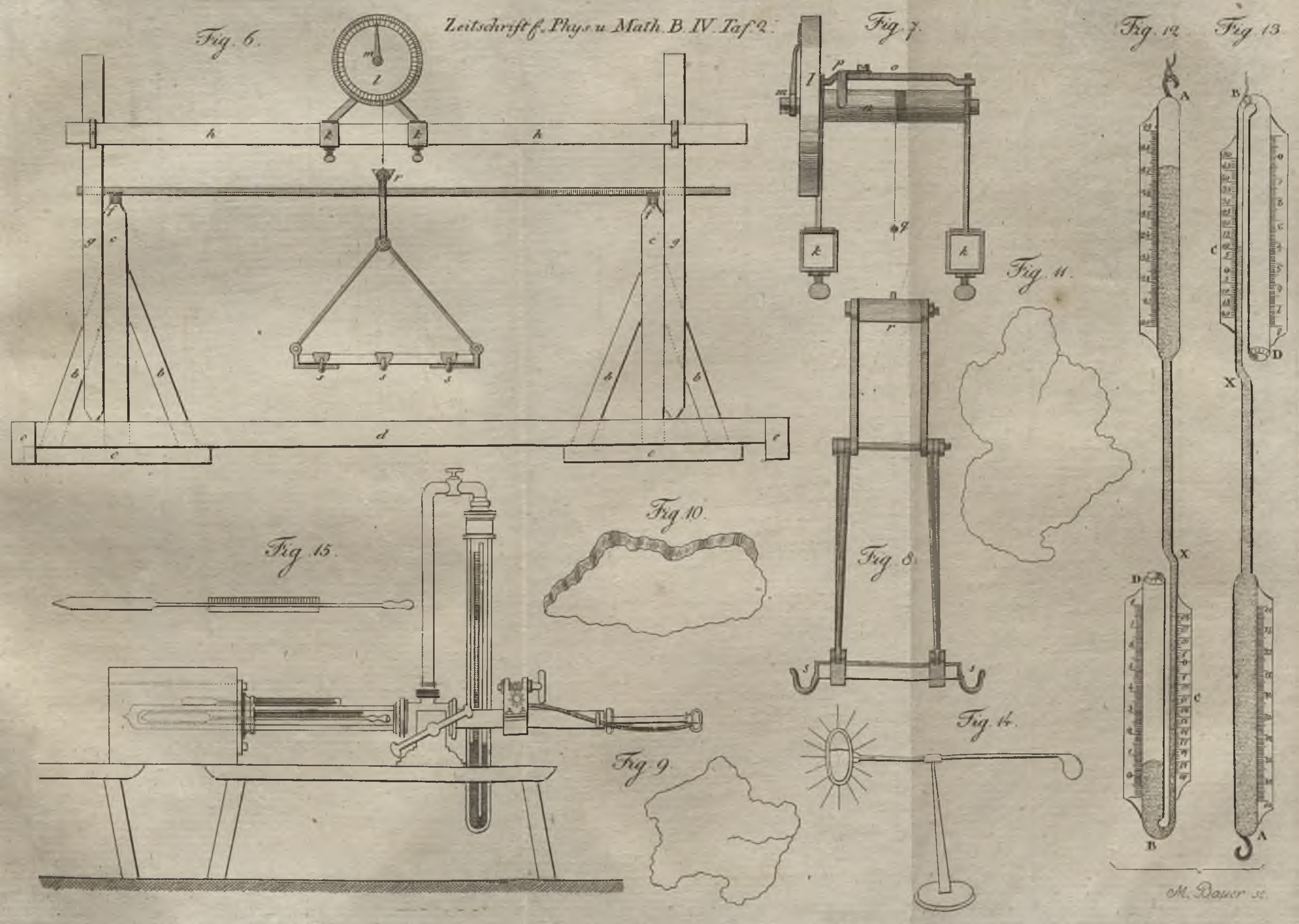
Durch ähnliche Formeln wird man die grofsen Buchstaben durch die kleinen ausdrücken können, wenn man von der Eigenschaft des Polardreieckes Gebrauch macht.

Zur weiteren Reduction dieser Ausdrücke merke ich noch an, dafs überhaupt

$$\sin.\ (45^\circ \pm \varphi) = \cos.\ (45^\circ \mp \varphi)$$

$$\text{und}\quad \operatorname{tg}.\ (45^\circ \pm \varphi) = \operatorname{cotg}.\ (45^\circ \mp \varphi)\quad \text{sey.}$$

Den Beweis dieser Sätze wird man in meinem bereits unter der Presse befindlichen und bald zu erscheinenden Werke über die analytische Geometrie finden.


Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
M. Bauer sc.